

有限要素法による移動現象解析

Transport Phenomena Analysis by Finite Element Method

藤 井 堅*
Katashi FUJII

1. まえがき

変分法が確立され電子計算機の大型化に伴って、有限要素法は目覚ましい発展を遂げつつある。現在では土木・建築・機械・船舶・航空などの構造工学分野において重要な解析法の1つとして定着していると言って過言ではない。本来、有限要素法は仮想仕事の原理と変分法の等価性から構造力学の分野で誕生し、はぐくまれた技術であるが、その定式化を一般化された重み付き残差法によって行うことで変分原理の存在しない工学・物理の分野への応用が可能となった。その結果、最近では、有限要素法は非常に多くの分野に渡って活躍し始めている。

一方、自然界を取り巻く現象は、運動量・質量・エネルギーなどの移動・変換に起因する。このような自然現象を巨視的に追跡し、把握していこうとする連続体力学的重要性が認識され、従来の工学体系における流体力学・伝熱工学・拡散理論などのように個々に取り扱われていた諸現象を、“移動現象理論”として統一的理論体系の確立が進められている。

一般に、移動現象においては図-1に示すように、現象論的關係式と保存則（物質・運動量・エネルギー）とからなりたち、この両者を組み合わせることによって移動現象の基礎方程式、すなわち、発展方程式が得られる。

このようにして導かれた発展方程式には、準調和方程式の形となるものが非常に多いことに気付かれるであろう。準調和方程式の標準形は、ベクトル記号を用いて次式のごとく表わされる。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} (v \varphi) = \text{div} (D \text{ grad } \varphi) + Q \quad (1)$$

ここに、 φ は物理量（濃度・温度・ポテンシャル）であり、 D は現象論的關係式における比例定数で通常、対称2次のテンソル、 Q は φ の移動をひき起す一般化され

た体積力である。準調和方程式を発展方程式に持つものについて表に思いついたものを示す。表には、 $\varphi \cdot D \cdot Q$ に対応するものについても示してある。このように、準調和方程式を解くことは、多くの問題の解決に繋がることになり、非常に有意義なことである。

ところで、式(1)は、それ自身では解が得られないことが知られており、それに境界条件または初期条件を与えることによって始めて解が得られる“境界値問題”である。（図-1参照）さきに言ってしまうと、有限要素法で式(1)を解析する場合に、境界条件の選択（導入）が大きな問題であることが指摘されている。たとえば、有限要素法への定式化の場合の境界条件の表現の仕方や、無限遠での境界条件の導入方法などがそれである。

本編では、移動現象の一つとして、準調和方程式を基礎方程式に持つ現象を取り上げ、それについて有限要素法への定式化を行う。さらに、その解析結果を示し、若干の考察を行なうものである。

2. 準調和方程式の Galerkin 法による有限要素法への定式化

先に述べたごとく、重み付き残差法による有限要素法の定式化には、その重みの選び方によって、選点法、サブドメインコロケーション法、Galerkin 法、などがある。

一般に Galerkin 法は最も良い近似解を与えることが知られている。

さて、未知関数 $\{\varphi\}$ が領域 V 内で満足されるべき発展方程式を次のように書く。

$$A(\{\varphi\}) = 0. \quad (2)$$

境界条件は、境界 S 上で

$$C(\{\varphi\}) = 0, \quad (3)$$

が要求されるものとする。

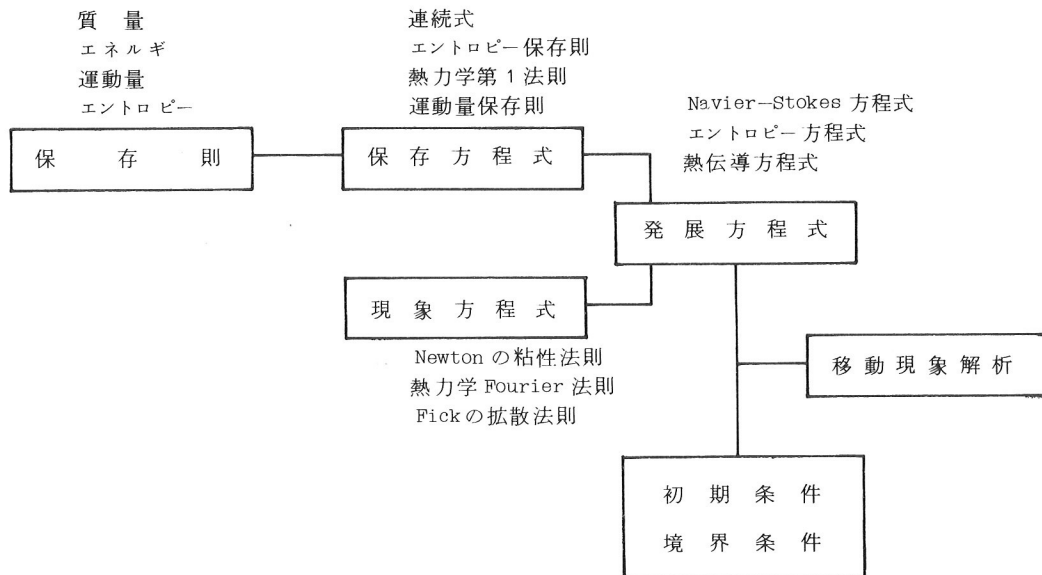


図-1 移動現象の数学的完成式化

表 準調和方程式と諸現象

	ϕ	D	Q	備 考
連 続 式	密 度	0	湧 出 し	
Navier-Stokes の方程式	単体体積当り の運動量	$\varepsilon + \frac{\mu}{\rho}$	圧力勾配と 物体力	ε ; 渦粘性 μ_p ; 動粘性係数
渦 度 方 程 式	渦 度	$\varepsilon + \frac{\mu}{\rho}$	0	ρ = 一定
回転運動方程式	流 れ 関 数	1	渦 動	$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, v = 0$
非 回 転 流 れ	流 れ 関 数	1	0	$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, v = 0$
浸透流方程式	水 頭	$\frac{k}{S}$	$\frac{Q}{S}$	k ; 透水係数 S ; 貯留係数 Q ; 湧出し, $v = 0$
熱伝導方程式	温 度	熱 拡 散 率	発熱量	$v = 0$
拡散方程式	濃 度	拡 散 係 数	発生量	
電磁場ポテンシャル	ポテンシャル	誘電(磁)率	自由電荷密度	$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, v = 0$
断面のねじり	応力関数	$1/G$	2θ	G ; セン断弾性係数

境界条件を満足する試験関数 $\{\varphi_a\}$ を次のような一般形で表されると仮定する。

$$\{\varphi_a\} = [N] \{\Phi\}. \quad (4)$$

ここに、 $[N]$ は座標のみの関数であり、 $\{\Phi\}$ は n 個のパラメータの組である。すると、 $\{\varphi_a\}$ は式 (2) を厳密には満足せず ε なる残差を生じる。この ε を領域 V 内の任意点で最小とするものが最良の近似解を与えることになる。最良の近似を得る一つの方法は、 ε がどこでも恒等的に零であれば次式が成立することを利用するものである。

$$\int_V W \varepsilon dV = 0 \quad (5)$$

ここに、 W は座標値の関数で重み関数と呼ばれる。

いま、 $\{\Phi\}$ の数が n 個であれば、 n 個の 1 次独立な関数 W_i を選び必要な連立方程式

$$\int_V W \varepsilon dV = \int_V W_i A ([N] \{\Phi\}) dV = 0, \quad (6)$$

を得る。

ここで、重み W_i に試験関数の $[N]$ を用いた場合が Galerkin 法である。

さて、式 (1) を少し拡張し、直交座標系で表わせば

$$\dot{\varphi} + v_j \varphi_{,j} = (D_{ij} \varphi_{,i})_{,j} + Q - \alpha_n \varphi^n. \quad (7)$$

ここで、 $\dot{\varphi}$ は $\partial\varphi/\partial t$ を表わし、右辺第 3 項は化学反応を伴うような場合の消失量を表わすものであり、 α_n は n 次反応速度定数を示す。

本編では、一次反応項まで考慮することにし、二次元平面問題について考えることにする。そうして、再び式 (7) について x, y 座標を用いて表わせば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \\ \frac{\partial}{\partial x} (D_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + D_{yx} \frac{\partial \varphi}{\partial y}) + \\ \frac{\partial}{\partial y} (D_{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + D_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y}) + Q - \alpha \varphi, \end{aligned} \quad (8)$$

となる。ここに、 u, v はそれぞれ x, y 方向の速度である。

さて、式 (8) について Galerkin 法を用いて、有限要素法への定式化を行うことにする。

式 (8) の右辺を左辺に集めて両辺に $\delta\varphi$ を掛け、要

素領域にわたって積分すれば次のような方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_V \dot{\varphi} \delta\varphi dV + \int_V v_j \varphi_{,j} \delta\varphi dV \\ - \int_V (D_{ij} \varphi_{,i})_{,j} \delta\varphi dV - \int_V Q \delta\varphi dV \\ + \int_V \alpha \varphi \delta\varphi dV = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

式 (9) の左辺第 3 項は Gauss の定理を用いて次式のごとく変換される。

$$\begin{aligned} \int_V (D_{ij} \varphi_{,i})_{,j} \delta\varphi dV = \int_S D_{ij} \varphi_{,i} n_j \delta\varphi dS \\ - \int_V D_{ij} \varphi_{,i} (\delta\varphi)_{,j} dV \end{aligned} \quad (10)$$

式 (10) を式 (9) に代入して、結局次のような方程式を得る。

$$\begin{aligned} \int_V \dot{\varphi} \delta\varphi dV + \int_V u_j \varphi_{,j} \delta\varphi dV \\ + \int_V \varphi_{,i} D_{ij} \varphi_{,j} dV + \int_V \alpha \varphi \delta\varphi dV \\ = \int_V Q \delta\varphi dV + \int_S D_{ij} \varphi_{,i} n_j \delta\varphi dS. \end{aligned} \quad (11)$$

境界条件として次のように選ぶ。

$$\varphi = \hat{\varphi} \quad \text{on } S_1, \quad (12)$$

$$D_{ij} \varphi_{,j} n_j = \hat{q} \quad \text{on } S_2 \quad (13)$$

ここで、熱伝導学における Newton の冷却法則を考えると、

$$\hat{q} = q_0 + \alpha_b (\varphi_b - \varphi), \quad (14)$$

と表わされ、 α_b は熱伝達率、 φ_b は外気温、 φ は表面温度である。さらに q_0 は、表面から流入する熱量を示す。

さて、式 (12), (13), (14) を式 (11) に代入して次式のごとく付帯条件を考慮した変分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \int_V \dot{\varphi} \delta \varphi dV + \int_V v_j \varphi_{,j} \delta \varphi dV + \int_V \varphi_{,i} D_{ij} (\delta \varphi)_{,j} dV \\
& + \int_V \alpha \varphi \delta \varphi dV + \int_S \alpha_b \varphi \delta \varphi dS \\
& = \int_V Q \delta \varphi dV + \int_S (\alpha_b \varphi_b + q_0) \delta \varphi dS. \quad (15)
\end{aligned}$$

いま、式(15)の未知関数 φ の値を要素節点のその値 $\{\Phi\}$ を用いて、

$$\varphi = [\mathbf{N}] \{\Phi\}, \quad (16)$$

と表わされるものとする。ここに、 $[\mathbf{N}]$ は座標のみの関数で表わされる行マトリックス、 $\{\Phi\}$ は $[\phi_1 \ \phi_2 \ \dots, \ \phi_n]^T$ であり、 ϕ_i の i は要素の各節点の φ の値である。

式(16)を式(15)へ代入して要素について積分すると、結局、次式のような連立方程式を得る。

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} + \mathbf{V} + \mathbf{D} + \alpha \mathbf{H} + \alpha_b \mathbf{S} \right] \{\Phi\} = \{\mathbf{Q}\} + \{\mathbf{F}\}. \quad (17)$$

ここに、

$$\mathbf{H} = \int_{elm} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dV, \quad (18)$$

$$\mathbf{V} = \int_{elm} [\mathbf{N}]^T v_j [\mathbf{N}]_{,j} dV, \quad (19)$$

$$\mathbf{D} = \int_{elm} [\mathbf{N}]_{,i}^T D_{ij} [\mathbf{N}]_{,j} dV, \quad (20)$$

$$\mathbf{S} = \int_S [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dS, \quad (21)$$

$$\{\mathbf{Q}\} = \int_{elm} Q [\mathbf{N}]^T dV, \quad (22)$$

$$\{\mathbf{F}\} = \int_S (\alpha_b \varphi_b + q_0) [\mathbf{N}]^T ds, \quad (23)$$

であり、これらの式で $[\mathbf{N}]_{,i}$ は、

$$[\mathbf{N}]_{,i} = \left[\frac{\partial N_1}{\partial x_i}, \frac{\partial N_2}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial N_n}{\partial x_i} \right] \quad (24)$$

を示す。

いま、要素として図-2に示すような三角形一次要素について考える。

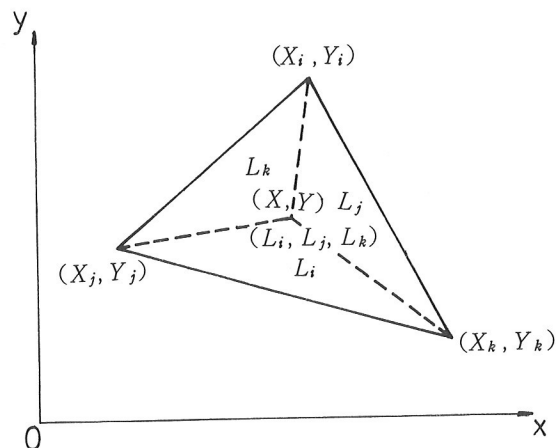


図-2 三角形要素と面積座標

形状関数 $[\mathbf{N}]$ は面積座標を用いて、

$$[\mathbf{N}] = [L_i, L_j, L_k], \quad (25)$$

と与える。ここに、 L_i, L_j, L_k は要素節点座標を用いて、

$$\begin{Bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \times \frac{1}{2A}, \quad (26)$$

である。ここに、

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = \text{要素の面積},$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= X_j Y_k - X_k Y_j, & b_1 &= Y_j - Y_k, & c_1 &= X_k - X_j, \\
a_2 &= X_k Y_i - X_i Y_k, & b_2 &= Y_k - Y_i, & c_2 &= X_i - X_k, \\
a_3 &= X_i Y_j - X_j Y_i, & b_3 &= Y_i - Y_j, & c_3 &= X_j - X_i,
\end{aligned} \quad (27)$$

である。

さて、式(20)において D_{ij} は直交異方性を仮定するすなわち、

$$D_{ij} = \begin{cases} D_x, D_y & \text{when } i=j \\ 0 & \text{when } i \neq j \end{cases}, \quad (28)$$

である。

式 (25) を式 (15) へ代入し、要素について積分すると、式 (18) ~ 式 (21) は次のようにマトリックス表示される。

$$\mathbf{H} = H_{ij}, \quad H_{ij} = \frac{A}{12} \begin{cases} 2 & \text{when } i = j \\ 1 & \text{when } i \neq j \end{cases} \quad (29)$$

$$\mathbf{V} = V_{ij}, \quad V_{ij} = \frac{u}{6} b_j + \frac{v}{6} c_j, \quad (30)$$

$$\mathbf{D} = D_{ij}, \quad D_{ij} = \frac{1}{4A} (D_x b_i b_j + D_y c_i c_j), \quad (31)$$

$$\mathbf{S} = S_{ij}, \quad S_{ij} = h \begin{cases} 0 & \text{when } i = j \quad (L_k = 0), \\ \frac{1}{3} & \text{when } i = j \text{ and } i \neq k \\ \frac{1}{6} & \text{when } i \neq j \text{ and } i \neq k \end{cases} \quad (32)$$

ここに、式 (30) の u, v はそれぞれ x, y 方向の要素を代表する速度、式 (32) の h は節点 i より対辺に下した垂線の長さである。

また、式 (22) は、要素内で一定の発生量 Q があるときには、

$$\{\mathbf{Q}\} = \frac{QA}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

である。

さて、式 (17) の時間に関する項には差分法によって表現する。本編では後退差分を用いることにする。そうすると、式 (17) は次のような後退差分方程式で表わされる。

$$\left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{H} \right] + \mathbf{V} + \mathbf{D} + \alpha \mathbf{H} + \alpha_b \mathbf{S} \{ \varphi_t \} = \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{H} \right] \{ \varphi_{t-\Delta t} \} + \{ \mathbf{Q} \} + \{ \mathbf{F} \}. \quad (34)$$

式 (34) に境界条件式 (12), (13) および初期条件を入れることにより、時々刻々の $\{ \varphi_t \}$ を求めることができる。

3. 数値計算例と考察

3-1 1次元拡散問題

いま、対流を考慮しない1次元拡散方程式は、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \alpha \varphi + Q \quad (35)$$

で表わされる。ここに φ は濃度、 Q は発生量、 α は1次反応速度定数である。

定常状態では、式 (35) は次のように書きかえられる。

$$\frac{d}{dx} \left(D \frac{d\varphi}{dx} \right) + \alpha \varphi + Q = 0. \quad (36)$$

図-3 に、定常状態の解析結果および厳密解を示す。

CASE-1 では、化学反応がなく、境界条件として、

$$\begin{cases} x=0 \text{ で } \varphi=100 \text{ (mol/l)} \\ x=20 \text{ で } \varphi=0 \text{ (mol/l)} \end{cases} \quad (37)$$

とし、内部に単位時間単位面積当り一定の発生量がある場合 ($Q/D = -0.5 \text{ mol/cm}^2$) を示している。

CASE-2 では、化学反応により消失する場合を示し、内部発生量がない場合で、境界条件は式 (37) で表わされる。また $\alpha/D = 0.01 \text{ l} \cdot \text{sec/cm}^2$ とした。

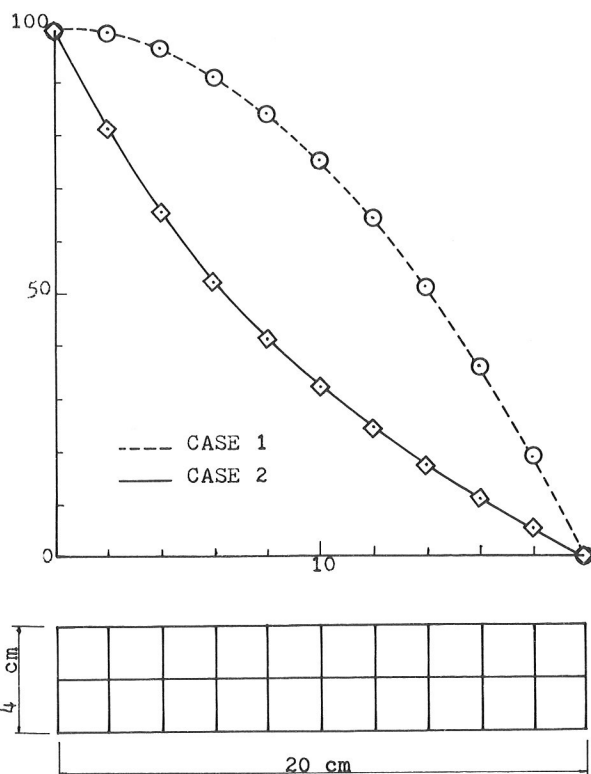


図-3 定常問題 (1次元)

両者ともに、計算結果は厳密解によく近似している。また式 (35) で $\alpha = 0, Q = 0$ の場合で、式 (38) の

境界条件のもとに解くと、厳密解として式 (39) を得る。

$$\begin{cases} t = 0 & \varphi = 0 \\ t \geq 0 & x = 0 \quad \varphi = \varphi_1 \\ & x = \infty \quad \varphi = 0 \end{cases} \quad (38)$$

$$\varphi_t = \varphi_1 \left(1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right). \quad (39)$$

ここに、 erf は誤差関数で、

$$\operatorname{erf} Z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^Z e^{-\xi^2} d\xi \quad (40)$$

である。

式 (39) 及び数値計算結果を図-4 に示す。図-4 で、 $\blacktriangle$ 、 $\bullet$ は各々図に示すように要素分割が異なっている。
(総自由度は両者とも33)

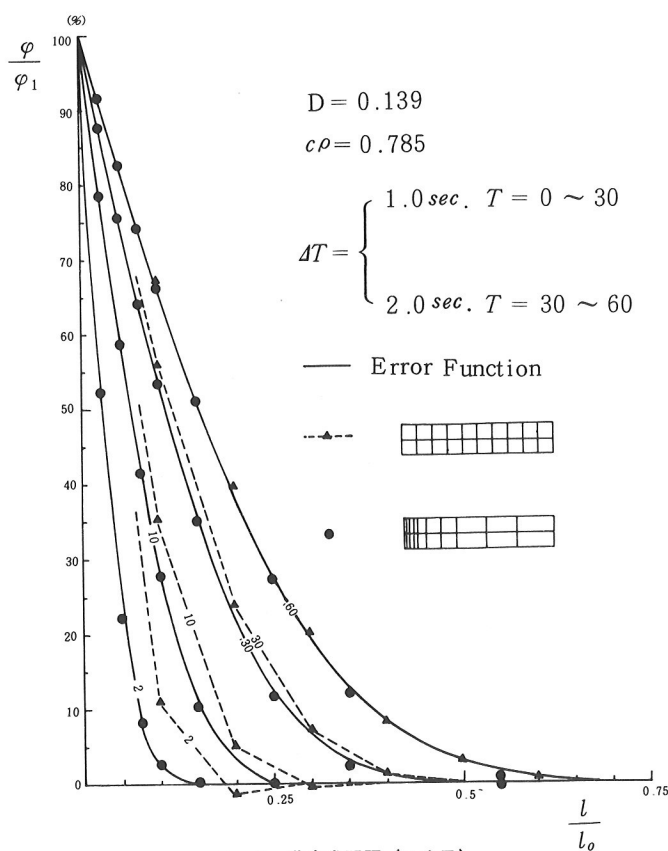


図-4 非常問題 (1 次元)

$\blacktriangle$ で示すように等分割された場合には、経過時間が短い時に十分な精度が得られていない。一方、 $\bullet$ で示すように、局部的に細かい分割を行うことで変化の激しさをうまく捕えることができる。差分法では $\blacktriangle$ のように等分割するのが普通であり、 $\bullet$ のように、局部的に細分割し

精度の向上を計ることができるのは有限要素法の強みと言えよう。なお、本解析で得られた $\blacktriangle$ で示される結果は差分法と等価である。

3-2 吊橋ケーブルの温度分布解析

昨今、架設誤差の評価として、ケーブルの温度によるサグの誤差が問題とされている。¹⁰⁾

本解析では、ケーブルは十分に長く、太陽光線による照射熱量は長さ方向に一様であると仮定する。

二次元非定常熱伝導方程式は次のように与えられる。

$$c\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$$

ここに、 c は比熱、 ρ は密度であり、 D_x, D_y はそれぞれ x, y 方向の熱伝導率である。

境界条件は次のように与える。

$$\begin{cases} T = T_0 & \varphi = \varphi_0 \\ T > T_0 & \hat{q} = \text{照射熱量 on } S_{11} \\ & \hat{q} = \text{Newton の冷却法則 on } S_{12} \end{cases}$$

いま、太陽光線による熱量は、

$$q = \beta J_0 P \operatorname{cosec} \delta \cos(\theta - \delta) \quad (42)$$

で与えられるとする。¹¹⁾ ここに、

β ; ケーブル表面の吸収率 (0.5)

J_0 ; 太陽定数 (1164 kcal/m² hr)

δ ; 太陽高度

P ; 透過率 (0.65)

θ ; ケーブル表面より立てた法線と水平面とのなす角度

である。

さて、吊橋橋軸方向は東西に走り、太陽光線はケーブルの南側を照射するものとし、太陽光度および外気温の変化は図-5 で与えられるものとする。

ケーブル断面の径は 300 mm, 1200 mm について解析し、それに用いた諸定数は次のようである。¹¹⁾

比熱 $c = 0.2$ cal/g°C

密度 $\rho = 6.3$ g/cm³

熱伝導率 $D_x = D_y = 8.88$ cal/cm°C hr

熱伝達率 $\alpha_b = 0.63$ cal/cm²°C hr

図-5 に径が 300 mm, 1200 mm のものについて平均温度の変化を示す。また、図-6 ~ 図-12 には各時刻について断面の温度分布を表わしている。

適用する場合には、表面温度を観測しそれらを

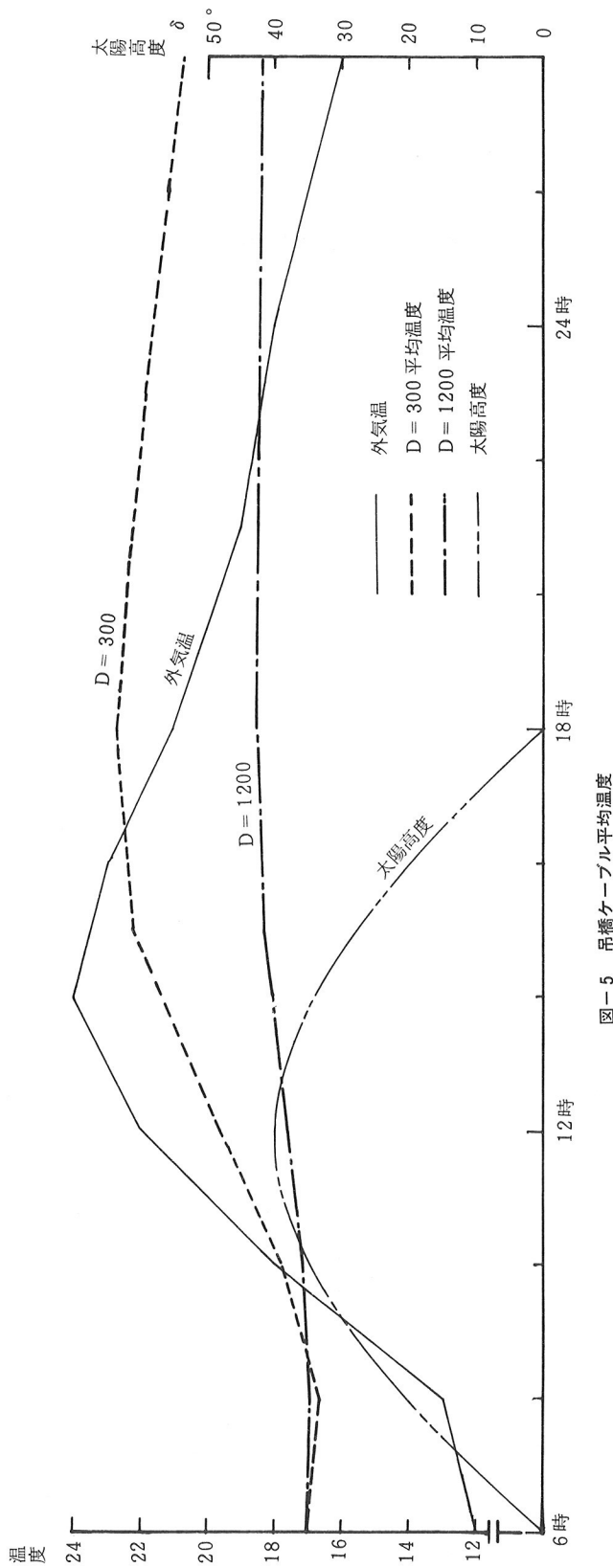


図-5 吊橋ケーブル平均温度

固定境界($\varphi = \hat{\varphi}$)として入力し, 時間的溫度變化を追求する方が容易であろう。というのは, 著者らは手元にデータがないため上述のような解析を行ったわけであるが太陽光線が天候によって変化したり, 風によって熱伝達率 α_b が變化する事が考えられ, 明らかでない諸定数を仮定しなければならないからである。

3-3 浸透流解析

浸透流方程式は, Darcy則と連続式とから導かれ,

$$S \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \quad (43)$$

と表わされる。ここに S は貯留係数, D_x, D_y は直交異方性を仮定した場合の透水係数である。

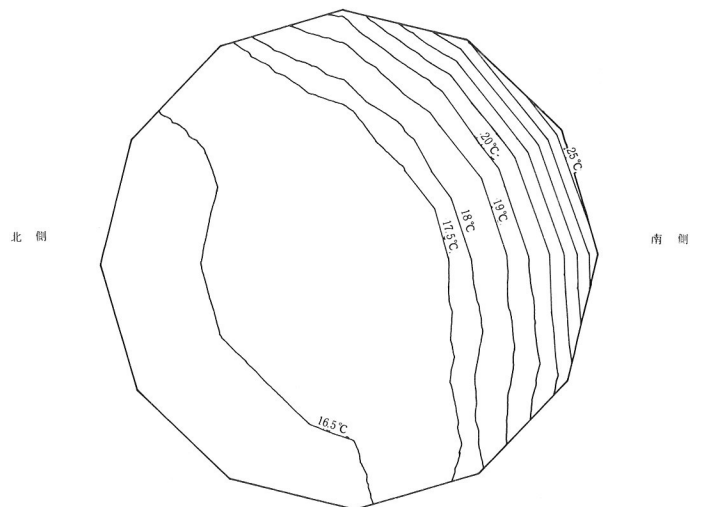


図-6 午前10時

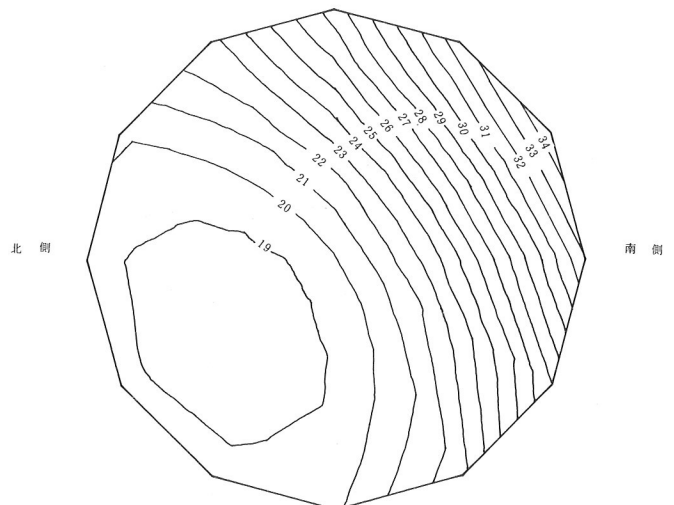


図-7 午後4時

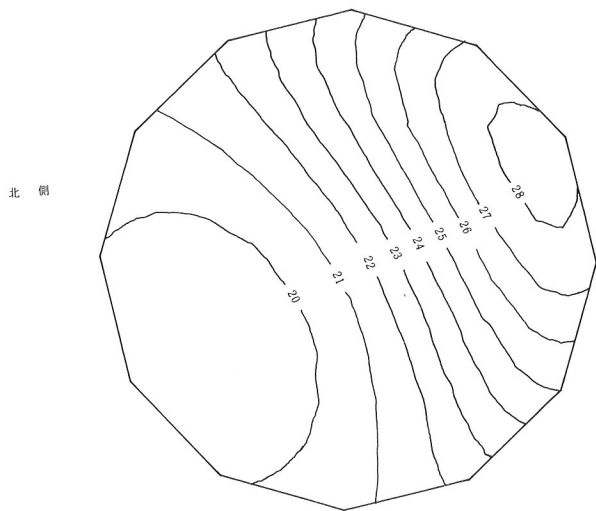


図-8 午後6時(日没)

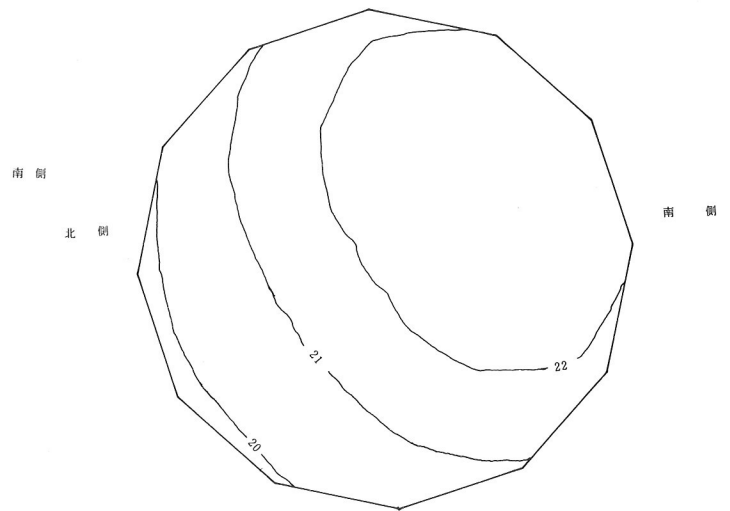


図-11 翌日午前10時

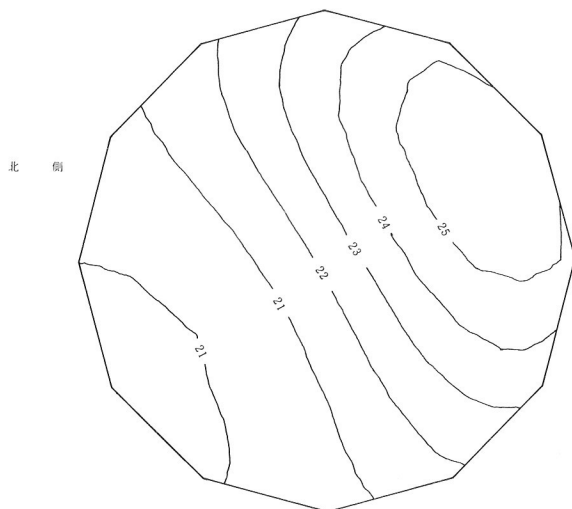


図-9 午後8時

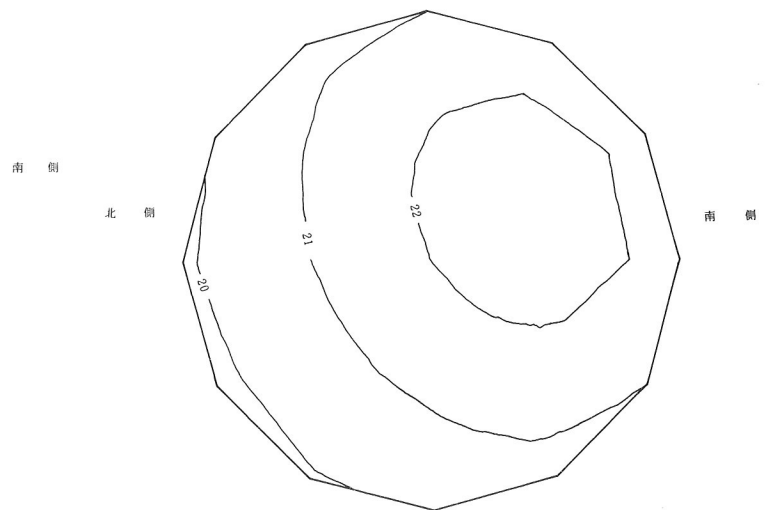


図-12 翌日午前4時

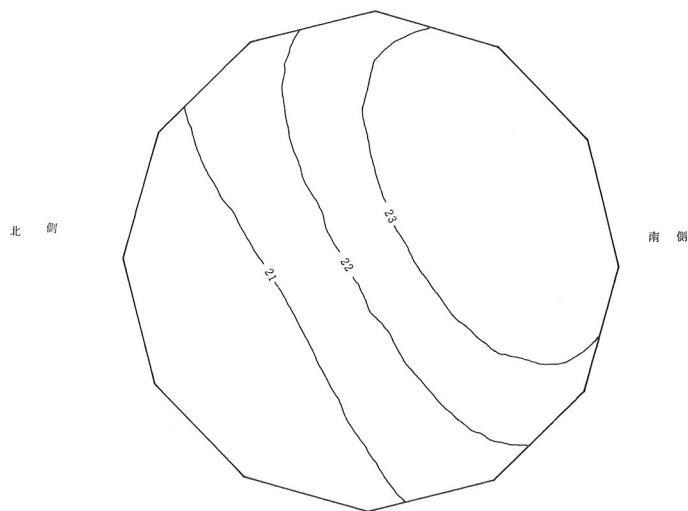


図-10 午後10時

図-13にフローティングダム(止水壁を有する)下層透水性地盤の定常浸透流の水頭分布を示す。

また、揚圧力 p はその点の圧力水頭を用いて、

$$\frac{p}{r_w} = \varphi - x_3 \quad (44)$$

と表わされる。ここに x_3 は位置水頭、 r_w は流体の密度である。同図には、ダム底部に作用する揚圧力分布も示している。

河川工事において漏水はやっかいな問題である。図-14に示すように河川内に円形締切堤を設け、堤内側をドライにして施工する場合を考える。

透水層が弾性的変形を起こし、かつ透水層内の浸透水が外部へ流出する条件でさらに堤内側の水位のみ変動す

る場合の非定常被圧浸透流方式は、

$$S \frac{\partial \varphi}{\partial t} = Dh \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\varphi}{c_1} + Q(x, t) \quad (45)$$

で表わされ、²³⁾ S , D , h , はそれぞれ貯留係数, 透水性地盤の透水係数および層の厚さを示し, C_1 は難透水層の透水係数 k_1 および層厚 h_1 を用いて

$$C_1 = \frac{h_1}{k_1}, \quad (46)$$

であり, さらに $Q(x, t)$ は、

$$Q(x, t) = S \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\varphi_1}{C_1}, \quad (47)$$

で, φ_1 は堤内側の水位である。

堤外側の水位を 8 m とし, 堤内側の水位は図-15 に示

すように変化させた場合を解析した。この時, 堤体は円筒状であるので図-14 に示すように要素分割を行う。

図-15 に貯留係数 $S = 0.0252$ とした場合の水頭分布を示す。また図-16 には $S = 0.074$ および $S = 0.0252$ の場合の中心からの距離 10 m, 30 m, 50, 81 m, 90 m の地点の水頭の時間変化を示す。図-16 からわかるように, 水頭の変化に伴ない透水層が弾性変形を起す場合には, 堤内側の排水速度によって堤内側の水頭は定常状態のそれよりも低くなり, それから徐々に定常状態へ回復する現象²³⁾をうまく捕えている。この事から, 排水直後において安定であった堤内地も時間が経つにつれてクイックサンド現象を起す危険性があることがわかる。

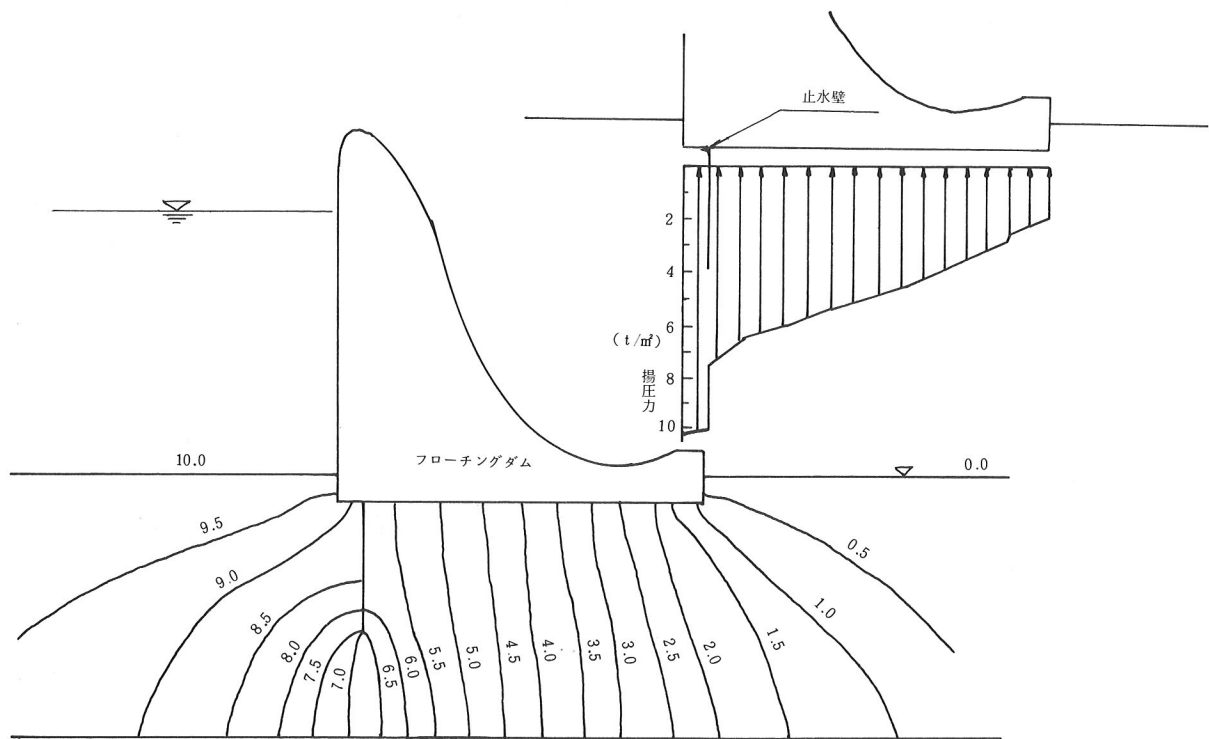


図-13 等ポテンシャル線と揚圧力

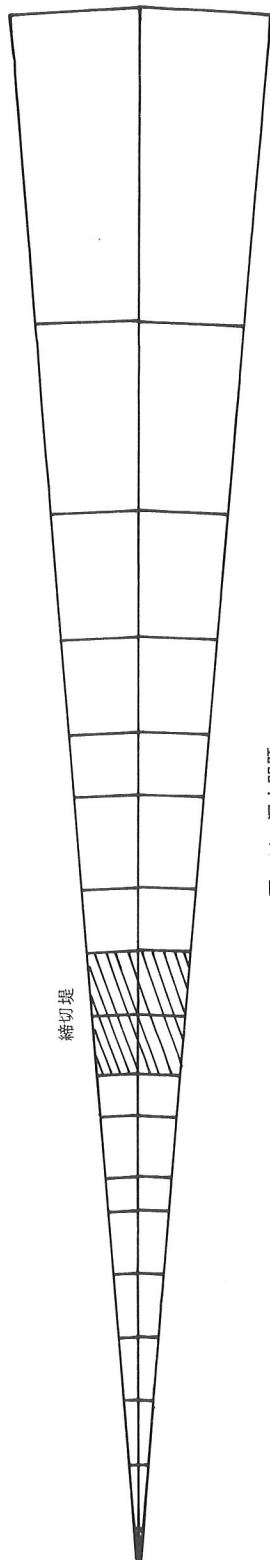
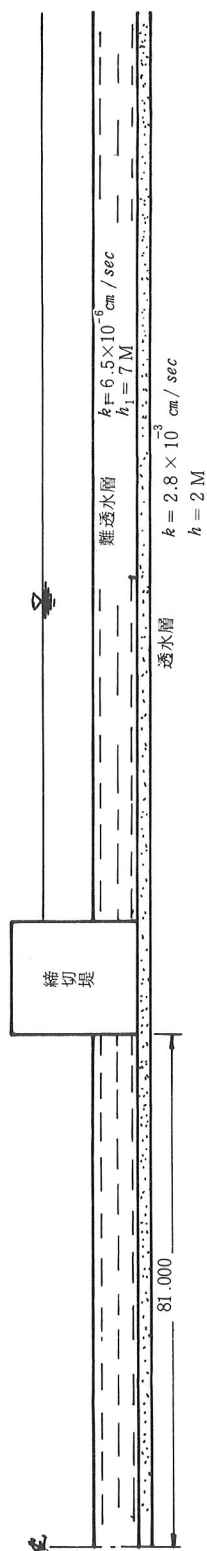


図-14 漏水問題

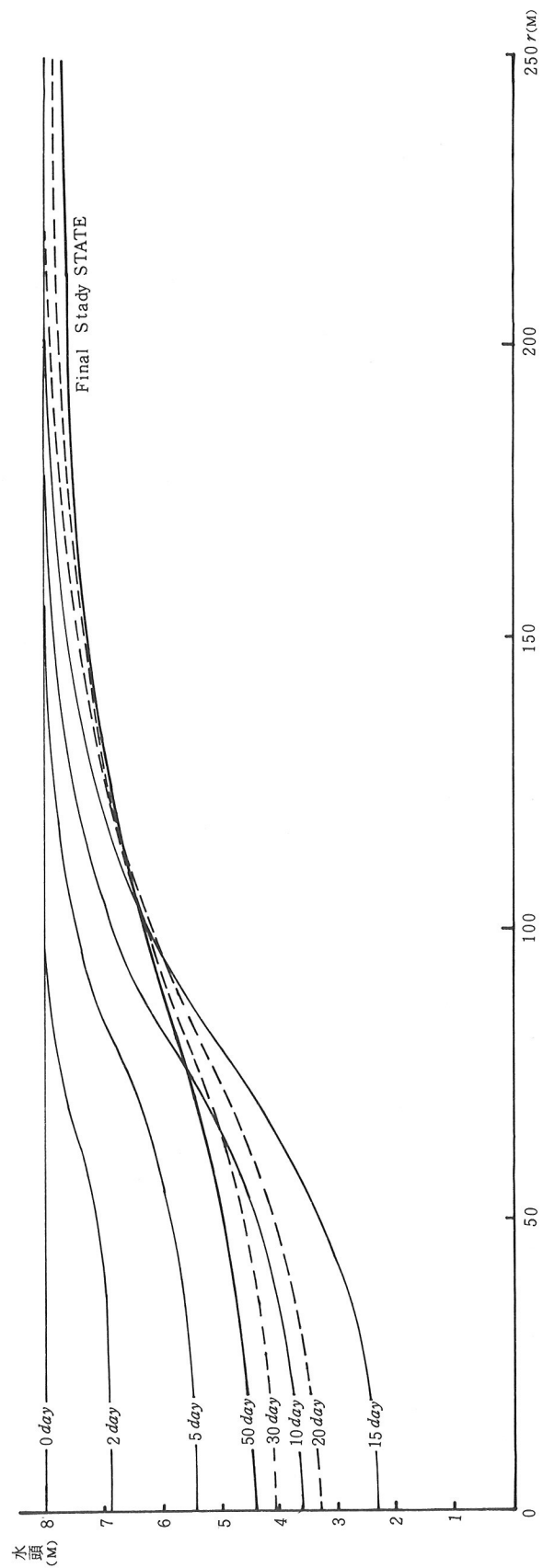


図-15 水頭分布図

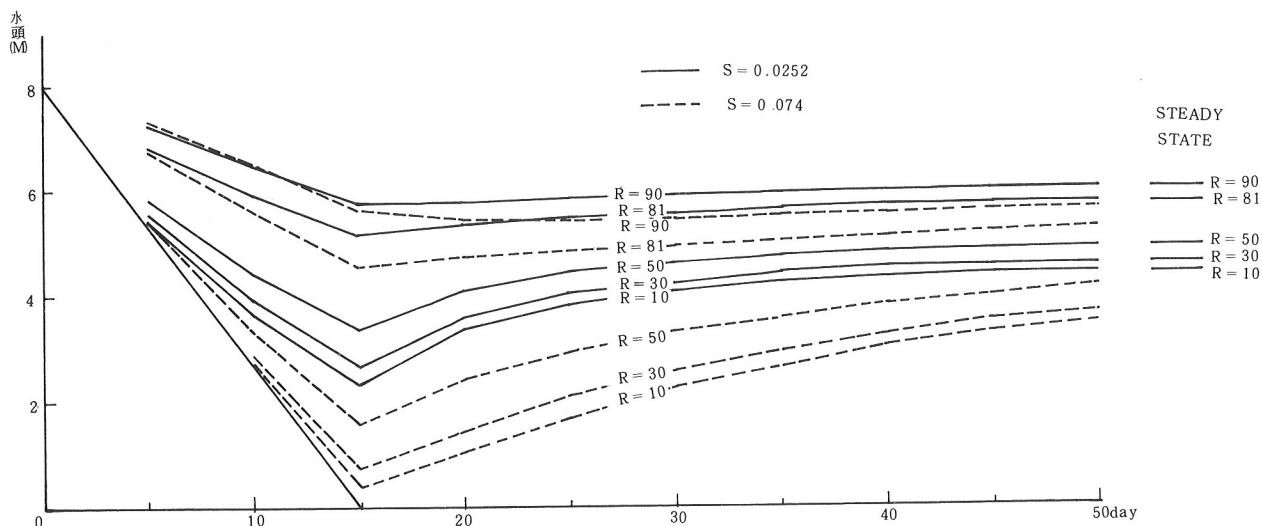


図-16 水頭-時間変化曲線

3-4 熱拡散率が温度によって 変化する場合の非定常解析

近年、超低温、超高温を扱う伝熱問題が必要となってきた。たとえば、液体ヘリウムやLNGなどの貯蔵タンク、およびその周辺の凍結土等の問題、溶接の母材に与える温度の影響や原子力压力容器の問題などのように、従来普通に用いられていた解析では十分でないような問題がある。

一般に、伝導体の温度が狭い領域で変化するような場合には、熱伝導率、比熱、密度などの諸定数は温度に起因せず一定であると仮定してよいが、上述のように広い範囲で温度変化を扱う場合には、これらの諸定数の温度による変化を無視することはできなくなる。たとえば、⁶⁾図-17～図-19に示すように炭素鋼の諸定数は変化する。

このような問題を扱う場合には、構造解析における材料学的非線形問題を論じる場合と同じように熱伝導率、比熱等の定数を温度によって変化させ次式を満足するまで反復計算を行なえばよい。

$$C(\varphi)\rho(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{div}(D(\varphi)\text{grad } \varphi) + \bar{Q} \quad (48)$$

本解析では、図-20に示すように、温度に対応して

$C(\varphi)$ 、 $\rho(\varphi)$ 、 $D(\varphi)$ が変化するものとし、初期温度が零の場合で瞬間的に $x=0$ で 800°C に加熱した場合の非定常解析を行なった。図-21に温度分布を示す。図-21には、諸定数を 500°C のもので代表させた解析結果も破線で示してある。図-20からわかるように、温度が低い場合には熱拡散率 ($D/C\rho$) が大きく、高温では小さくなっている。すなわち、溶接における温度の影響範囲は諸定数が温度に依存しないで一定と仮定した場合よりもかなり

広がることが予想される。この事は、図-21の結果に顕著に表われている。このような解析は、残留歪み、残留応力の評価等に有効に用いられるであろう。当然、応力や歪みの解析には、温度による弾性係数やポアソン比の変化も考慮されねばならないであろうが……。

なお、本解析では、約2～5回で1/1000の精度に収束した。時間間隔は、0～30秒で2秒、30～100秒で5秒、100～200秒で10秒とした。当然のことながら、温度変化の激しい場合や、諸定数の温度による変化が激しい場合には、時間間隔を小さくすることで反復回数の低減化をはかることができよう。

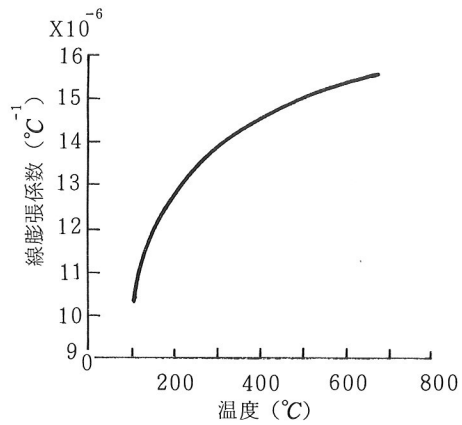


図-17 線膨張係数

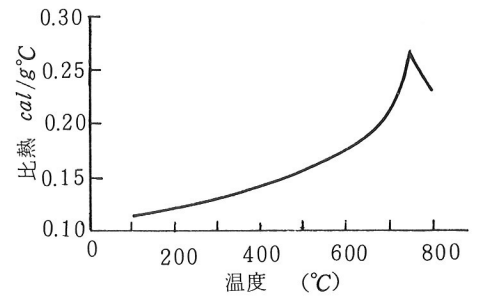


図-18 比熱

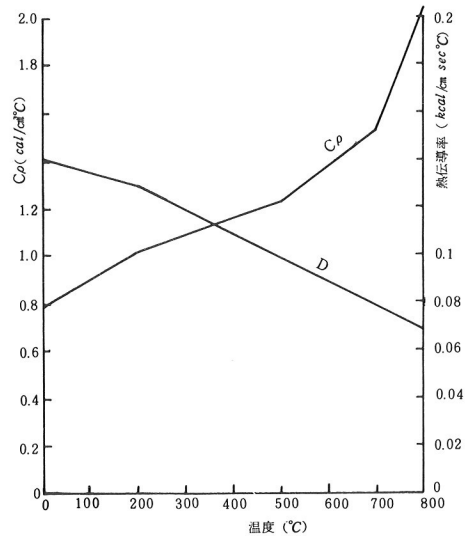


図-20

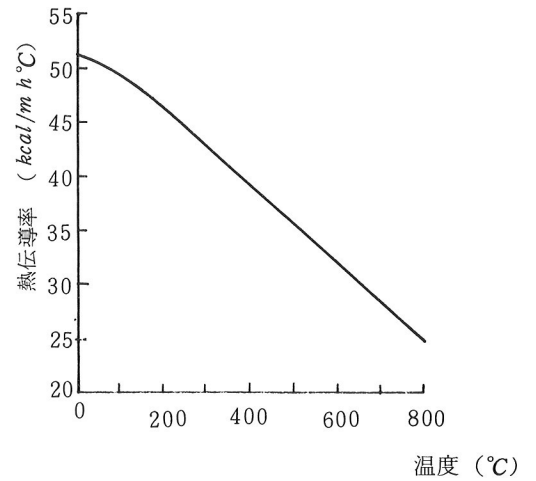


図-19 熱伝導率

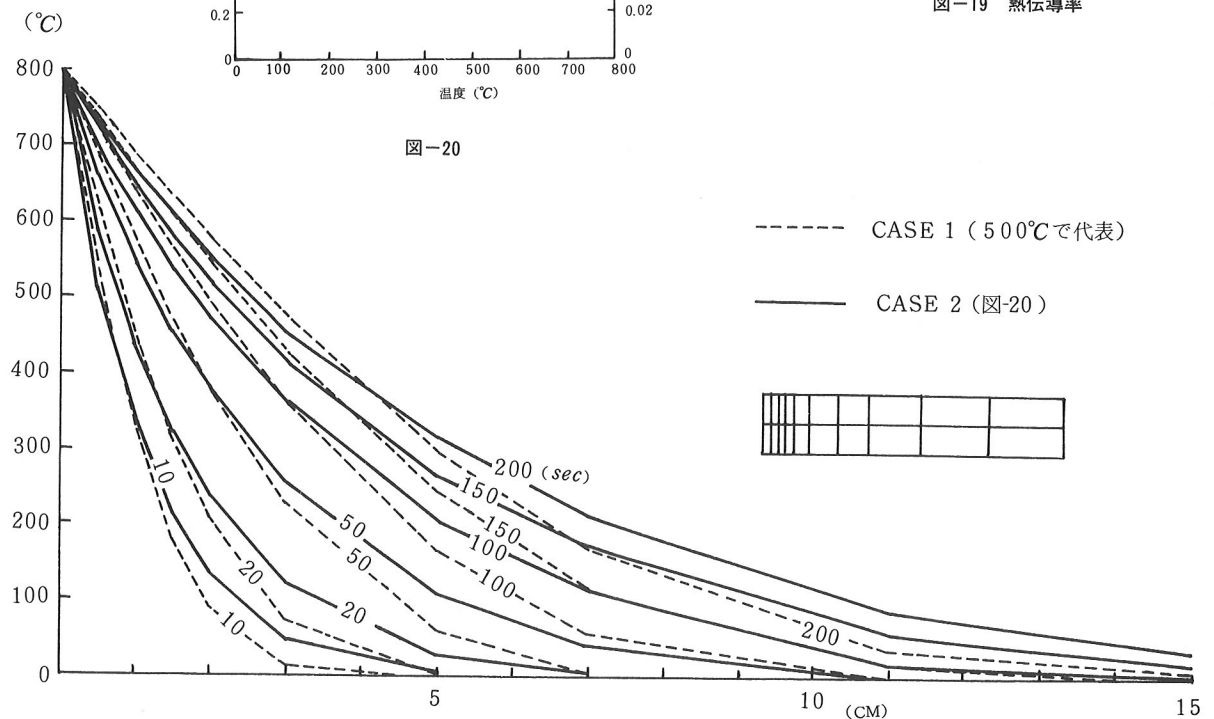


図-21 温度依存物理値を持つ熱伝導解析

4. あとがき

以上、準調和関数の汎用性を示し、式(1)を拡張した(n 次反応項を考慮した)式(7)、さらに、比熱、熱伝導率が温度に依存して変化するような問題への有限要素法による解析が可能であることを示した。

式(7)の右辺第3項は多くの可能性を持っている。たとえば、1次反応に対応するものとしては、二次元熱問題での面からの熱伝達や、3-3に示したように非定常被圧浸透流の難透水層へ抜けていく流量がある場合(式(45)右辺第2項)が考えられる。また、二次元熱での面からの輻射は4次反応に対応することが容易にわかる。

現在、構造分野以外への有限要素法の応用は、多くの研究者によってなされており、ダムの越流解析¹⁶⁾¹⁷⁾粘性流体の解析¹³⁾¹⁸⁾潮流拡散解析²²⁾などが報告されている。

しかしながら、これらの問題への応用がなされたのは極く最近の事であり、付随する解決されるべき問題が山積している。たとえば先に述べたように境界条件の選択、時間スキームと収束性の問題⁸⁾などは代表的である。

今後、多くの解析・実験を通して、遂次これらの諸問題を解決し、より高い精度でしかも能率的に解を得るようにするのは、残された大きな問題であろう。

また、移動現象は3-4に示したように非線形性を有する問題が多く、これに対する収束性も今後の課題であろう。

本編では、浅学の著者が思いつくままに解析例を挙げるだけに限り十分な考察を行なうことができなかった。移動現象解析と一口に言っても、それは非常に多方面に渡っており、得られた諸現象の結果が各分野にどのような影響を及ぼすかと言った評価はそれぞれの分野で行なわれなければならない。すなわち、マスコンクリートひび割れの問題を扱う場合には、熱伝導と応力解析が必要であり、堤体の安定問題では、浸透流と有効応力と言うように移動現象は全体の一翼を担うものである。

このような意味で、今後、これらの解析を応用面で活用することに取り組んでいくつもりである。

参考文献

- (1) O. C. Zienkiewicz "基礎工学におけるマトリックス有限要素法" 邦訳, 培風館, 1975
- (2) 川井忠彦 "有限要素法の構造工学以外の分野への応用" JSSC "有限要素法の応用" 1975
- (3) 藤野 勉 "コンピュータによる構造工学講座 II - 4 - B; 熱伝導と熱応力" S. 47. 7
- (4) 一色尚次 "伝熱工学" 森北出版 1967
- (5) プランク "理論熱学" 生産技術センター S. 52
- (6) 竹内洋一郎 "熱応力" 日新出版 S. 50. 2
- (7) 庄子幹雄他 "有限要素法による非定常熱伝導解析(差分法と直接法の比較) JSSC 第7回大会研究集会マトリックス構造解析論文集 S. 48. 6
- (8) 武田 洋 "非定常熱方程式に対する有限要素モデルと時間ステップに関する考察" JSSC 第11回大会研究集会発表論文集
- (9) 吉田裕也 "有限要素技報に基づいた熱伝導方程式の時間積分公式" 同上 S. 52. 6
- (10) 長谷川・一他 "吊橋製作誤差による変位・応力" 橋梁と基礎 Vo 9, No. 1 1975 P. 24 ~ P. 32
- (11) 村井俊治 "日照・日射の効果に関する基礎的研究" 土木学会論文報告集 No. 215, 1973, 7
- (12) 土木学会編 "土木工学における数値解析/流体解析編" サイエンス社 1976
- (13) 吉村信敏 "Galerkin 有限要素法による Navier-Stokes 方程式の解法" JSSC "有限要素法の応用" 1975
- (14) テルツァギ・ベック "土質力学・基礎編" 丸善, 1969
- (15) 岩差義明 "水理学" 朝倉書店 S. 47. 2
- (16) 鷺津久一郎 "コンピュータによる構造工学講座 II - 3 - A・弾性学の変分原理概論" 培風館 S. 48. 2
- (17) 鷺津久一郎 "ダムを越える流れの解析第2報" JSSC, 第11回大会研究集会論文集 S. 52. 6
- (18) 寺前哲夫 "有限要素法の流体問題への適用例" 同上
- (19) 川原睦人他 "密度流の有限要素解析" 同上
- (20) 川井忠彦 "汚染拡散問題の解析と重みつき残差法" 生産研究 vol 28. No 3 (1976, 3)
- (21) 藤谷義信他 "有限要素法による電解におけるイオン拡散解析" JSSC, 第7回大会研究集会発表論文集 S. 48. 6
- (22) 田中豊喜他 "潮流拡散解析と有限要素法" JSSC 第11回大会研究集会発表論文集 S. 52. 6
- (23) 山村和也, 久楽勝行 "堤防の地盤漏水に関する研究" 土木研究所報告 145 - 1 S. 47. 7