

PC箱桁押出し施工時における 2,3の問題について

Some Problems in Extrusion Method for Prestressed Concrete Bridge

野田行衛 *
Yukie NODA

1. まえがき

最近、ヨーロッパを中心に、プレストレストコンクリート橋梁の架設に押出し工法が利用されることが多くなっており、日本もこの例外ではない。この工法は、多径間連続桁橋や既設の道路を横断する高架橋の建設に適しており、又急速施工が可能で、作業が単純で、熟練工を必要としないなど多くのメリットがある。押出し工法に用いる断面形状は箱桁形式のものがほとんどであるが、

(西ドイツでは二主桁橋を用いた例がある。) これは美観・経済性の理由の他押出し架設時における桁応力変化への対処に適しているからである。架設時に生ずる応力に対処するためにPC鋼棒によるプレストレス導入が桁になされるが、架設時応力を減少させるために仮支柱を設けたり、桁先端に手延桁を取り付けたりといった工夫がなされている。しかしながら断面は多くの橋脚上を通過していくので、橋脚の沈下による予期しない断面力の発生、あるいは荷重による局部応力の発生といった問題がある。特に箱桁を構成する下床版の施工精度が悪かったり、橋脚が不等沈下したり、あるいは荷重設置の誤差のため桁が捩られることになる。本稿は、橋脚上の左右の高さに差がある場合、それによって連続桁に発生する捩りによる断面応力がどの程度になるか曲げねじり理論をもとに典型的な橋梁を例にとって計算を行い、考察を加える。また箱桁には断面保持材として隔壁が設けられるが、押出し工法では、桁断面が多くの橋脚上を通過

するので、当然隔壁のない断面も支点反力を受けることになる。このような断面に偏心反力が作用した場合、断面に図-1に示すようなセン断変形が生ずることになる。4章では、隔壁のない断面が偏心反力を受けた場合、どれ程の変形と応力をうけるかについて、断面変形理論にもとづいて計算してみる。これらの結果は押出し架設時の施工管理上の一助となれば幸いである。

2. 計算方法と仮定

連続桁の端部では、その拘束ではなく、支点 P_m 上で左右の高さの差が a mm あったとし、支点 P_m 以外の支点上では、橋軸回りの回転はなく、軸直角水平方向の移動はないものとする。

2-1 断面力

支点 P_m 上で桁断面が ϕ_m だけ回転すると桁にねじりモーメントが発生し、荷重では偏心反力が生ずる。この桁のねじりによって各中間支点断面上では、その拘束により支点曲げねじりモーメントが発生する。(図-2)

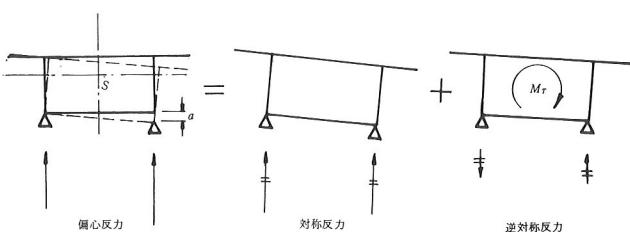


図-2 高さによる回転

一般に梁の曲げねじりの微分方程式は、

$$\varphi'' - \lambda^2 \varphi'' = \frac{m_T}{E F_{WW}} \quad \lambda = \sqrt{\frac{G J_T}{E F_{WW}}} \quad (1)$$

で与えられる。ここに φ : ねじり角, J_T : ねじり抵抗, F_{WW} : 曲げねじり抵抗, m_T : 分布ねじりモーメント。

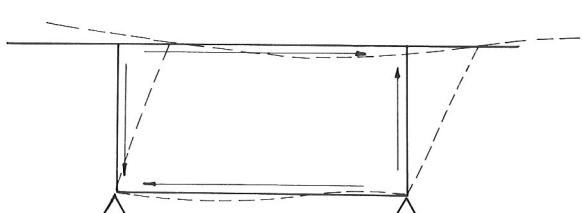


図-1 隔壁のない断面の支点上断面変形

さて連続桁が支点上で ϕ_m ラジアン回転したときの断面力を求める関係式は、(1)式で両支点に回転が生じた場合と端部に曲げねじりモーメントが作用した単純桁の解を重ね合わせて求められる。さらにこれらの解を支点での連続条件、すなわち支点断面で部材の急激な変化ではなく、ねじり率が一致する、($\varphi'_{右} = \varphi'_{左}$)、及び垂直応力が連続的に変化する、($\varphi''_{右} = \varphi''_{左}$)という条件を用いると、三連曲げねじりモーメントの(2)式が得られる(図-3)。

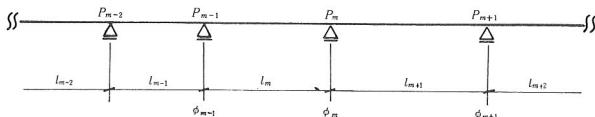


図-3

$$\begin{aligned}
 & MW_{m-1} \left(1 - \frac{\lambda_m l_m}{\sinh \lambda_m l_m} \right) + MW_m \left\{ \lambda_m l_m \coth \lambda_m l_m - 1 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{J_m l_m}{J_{m+1} l_{m+1}} (\lambda_{m+1} l_{m+1} \coth \lambda_{m+1} l_{m+1} - 1) \right\} \\
 & + MW_{m+1} \frac{J_m l_m}{J_{m+1} l_{m+1}} \left(1 - \frac{\alpha_{m+1} l_{m+1}}{\sinh \lambda_{m+1} l_{m+1}} \right) \\
 & = G J_m \left\{ \frac{l_m}{l_{m+1}} (\phi_{m+1} - \phi_m) - \phi_m + \phi_{m+1} \right\} \quad (2) \\
 & \qquad \qquad \qquad m = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

ただし、 MW_m : m 支点上の曲げねじりモーメント、

l_m : スパン長

(2)式によりそれぞれの支点上の曲げねじりモーメントが求められる。さらに任意断面のねじり角 φ 、St.Venant ねじりモーメント M_{TP} 、曲げねじりモーメント MW 、2 次ねじりモーメント M_{TS} が以下の式で求めることができる。¹⁾

$$\begin{aligned}
 M_{TP} &= GJ \frac{\phi_m - \phi_{m-1}}{l_m} + \frac{1}{l_m} \left\{ MW_{m-1} \left(1 - \frac{\lambda_m l_m \cosh \lambda_m x_m'}{\sinh \lambda_m l_m} \right) \right. \\
 & \quad \left. + MW_m \left(\lambda_m l_m \frac{\cosh \lambda_m x_m}{\sinh \lambda_m l_m} - 1 \right) \right\} \quad (3) \\
 & \qquad \qquad \qquad x_m' = l_m - x_m
 \end{aligned}$$

$$MW = MW_{m-1} \frac{\sinh \lambda_m x_m'}{\sinh \lambda_m l_m} + MW_m \frac{\sinh \lambda_m x_m}{\sinh \lambda_m l_m} \quad (4)$$

$$M_{TS} = MW_{m-1} \frac{\lambda_m \cosh \lambda_m x_m'}{\sinh \lambda_m l_m} - MW_m \frac{\lambda_m \cosh \lambda_m x_m}{\sinh \lambda_m l_m} \quad (5)$$

$$M_G = M_{TP} + M_{TS} = GJ \frac{\phi_m - \phi_{m-1}}{l_m} + \frac{MW_{m-1} - MW_m}{l_m} \quad (6)$$

2-2 断面応力計算

すべての断面で梁の曲げ理論が成り立つものとする。

a) 曲げ応力 σ_B

$$\sigma_B = \frac{M_B}{F_{yy}} \cdot y_{o,u} \quad (7)$$

M_B : 曲げモーメント、 F_{yy} : x 軸回りの断面二次モーメント。 $y_{o,u}$: 重心位置からの上縁、下縁までの距離。

b) 純ねじりによるセン断応力 τ_T

$$T = \tau_T \cdot t = \frac{M_{TP}}{J_T} \cdot \psi \quad (8)$$

$$J_T = J_o + J_B, \quad J_o = \frac{1}{3} \sum t^{\frac{3}{2}} \cdot S_i, \quad J_B = \frac{4F_m^2}{\oint \frac{1}{t} ds}, \quad \text{たたずし, } F_m$$

は閉断面の中心線で囲まれた面積 ($F_m = ab$)、 $\psi = \frac{2F_m}{\oint \frac{1}{t} ds}$ 、
 t ; 板厚

c) 曲げねじり応力 σ_W

$$\sigma_W = \frac{MW}{F_{WW}} W \quad (9)$$

$$F_{WW} = \int W^2 \cdot dF \quad W ; \text{ 単位そり関数}$$

d) 二次ねじりモーメントによるセン断応力

$$\tau_W = -\frac{1}{t} \frac{M_{TS}}{F_{WW}} (F_{W0} + F_{W1}) = -\frac{1}{t} \frac{M_{TS}}{F_{WW}} F_W \quad (10)$$

$$\text{ここで } F_{W0} = \int W dF, \quad F_{W1} = -\frac{\oint \frac{F_{WW}}{t} ds}{\oint \frac{1}{t} ds},$$

$$F_W = F_{W0} + F_{W1}$$

以上の式を用いて、押出し工法に用いる典型的な橋梁について計算を行う。

3. 計算結果

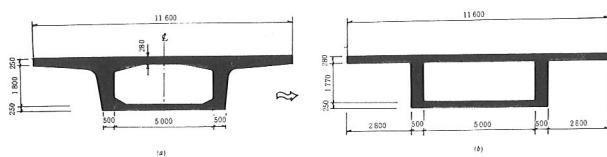


図-4 理想化した断面

断面計算に用いる断面は、図-4のように理想化を行う。

断面定数

$$F = 6.663 \text{ m}^2, y_o = -0.733 \text{ m}, y_u = 1.307 \text{ m}$$

$$F_{xx} = 55.314 \text{ m}^4$$

$$F_{yy} = 4.97 \text{ m}^4$$

$$F_m = ab = 11.22 \text{ m}^2$$

$$J_B = 10.120 \text{ m}^4$$

$$\psi = 0.451 \text{ m}^2$$

$$J_o = 0.284 \text{ m}^4$$

$$J_T = J_B + J_o \\ = 10.404 \text{ m}^4$$

$$F_{WW} = 7,272 \text{ m}^6$$

$$GJ_T = 1,357 \times 10^7 \text{ t} \cdot \text{m}^2$$

ただし $E = 3000000 \text{ t/m}^2$ とする。

$$\lambda = \sqrt{\frac{GJ_T}{EF_{WW}}} = 0.7887$$

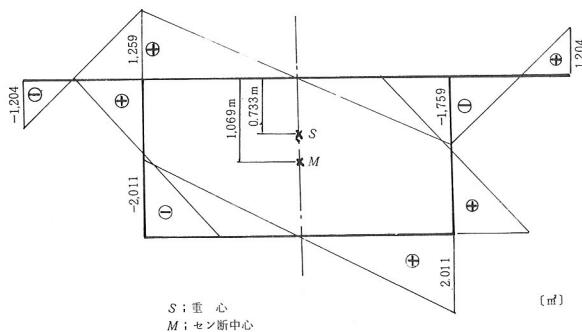
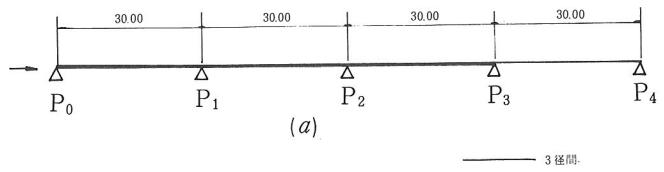
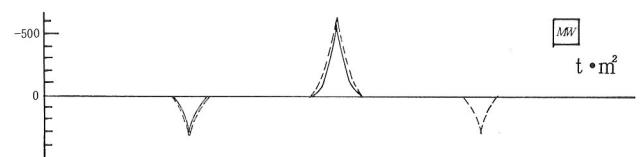


図-5 単位そり関数分布

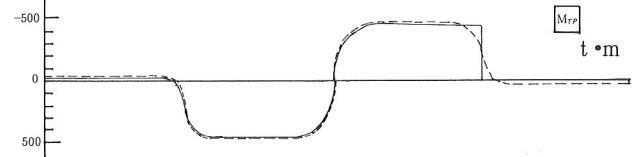
桁が徐々に押出され、連続桁の状態になるが、高さのある支点を P_2 とすると、その影響が顕著な場合の三径間及び四径間の場合について計算する。結果は図-6に示す。なお P_2 上での左右の高差は 5 mm あるとし、したがって回転角 $\phi_2 = 0.001 \text{ ラジアン}$ あったとする。



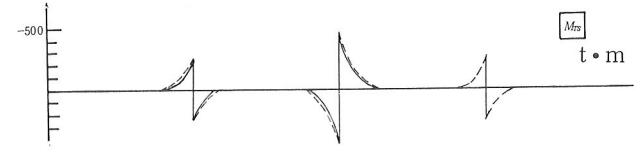
(a)



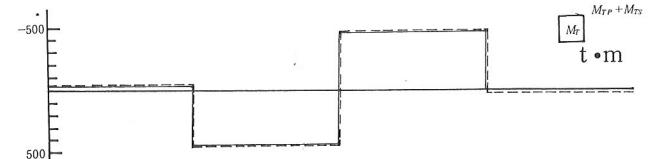
(b) 曲げねじりモーメント



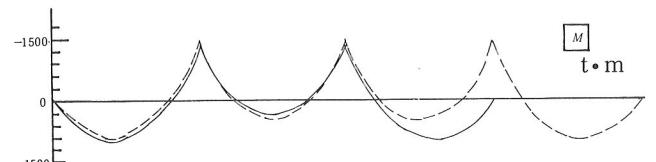
(c) 純ねじりモーメント



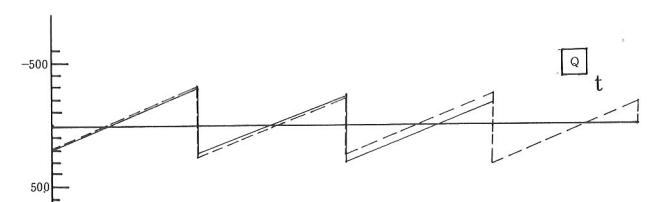
(d) 2次ねじりモーメント



(e) 合ねじりモーメント



(f) 曲げモーメント



(g) セン断力

図-6 断面力

三径間の場合の曲げねじりモーメントによって生ずる垂直応力分布を図-7に示すが、 P_2 支点上断面ウエブ下端(2)では、 $\sigma_w = -16.8 \text{ kg/cm}^2$ 生じる。一方沈下しない三径間連続桁の死荷重による P_2 支点断面のウエブ下端に生じる曲げ圧縮応力は $\sigma_b = -39.5 \text{ kg/cm}^2$ である。

これから、 σ_w は曲げ応力に対して約43%をしめる。また①で生ずる曲げ引張応力と曲げねじり引張応力の和は、 $\sigma = \sigma_b + \sigma_w = 36.8 \text{ kg/cm}^2$ となる。

しかしながら一般に箱桁の場合、 λ が大きいので曲げねじりによる影響は小さく、局部的で支点付近を除いた支間部では、ほとんど影響がない。例えば図-6(b)に示すように P_2 上の曲げねじりモーメントは $605 \text{ t}\cdot\text{m}^2$ であるが P_2 支点から $l/100$ の位置では $57 \text{ t}\cdot\text{m}^2$ 、 $l/100$ では約 $5 \text{ t}\cdot\text{m}^2$ で P_2 上のそれの $1/100$ 以下となる。曲げねじりとともに二次ねじりモーメントの影響も支点部を除き小さいが、それに反し支間部では、純ねじりが支配的となる。

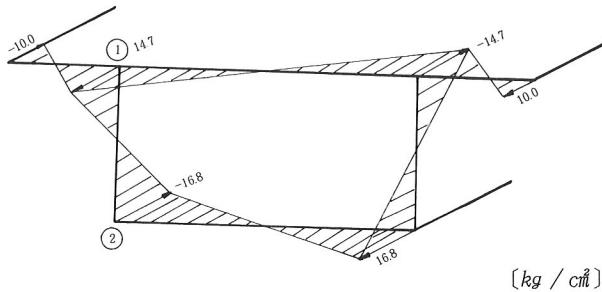


図-7 そりによる直応力分布

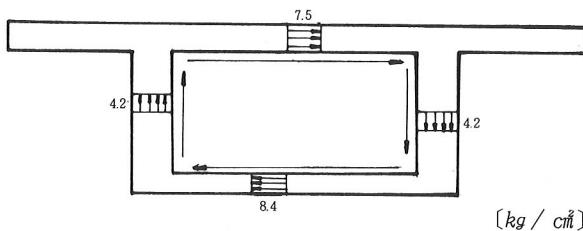


図-8 純ねじりによるセン断応力分布

三径間連続桁の P_1 と P_2 の支間中央断面ではセン断流は、 $T = 210 \text{ kg/cm}$ で、それぞれの断面厚に反比例したセン断応力は図-8に示す。一方三径間連続桁の中間支点に生ずる死荷重による最大セン断応力は、 $\tau_b = 11.6 \text{ kg/cm}^2$ である。

これから純ねじりによる最大セン断応力（支間中央）は、曲げによる最大セン断応力（支点上）の36%にあたる。次に P_1 、 P_2 間の曲げモーメントが0になる位置

（支点から $l/5 = 6 \text{ m}$ ）の曲げセン断とねじりセン断の和は、 15.8 kg/cm^2 となり、この値は一般に $\sigma_{CK} = 500 \text{ kg/cm}^2$ のコンクリートの場合の許容斜引張応力度にはほぼ等しい。下図に二次ねじりモーメントによるセン断応力の $1/(M_{Ts}/F_{WW})$ 倍の分布図を示す。

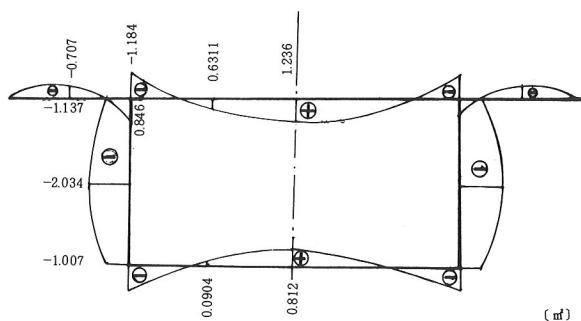


図-9 二次ねじりモーメントによるセン断応力分布

4. 隔壁のない場合の箱桁の変形と応力

はじめに述べたように、隔壁のない断面が支点上に来た場合に、何らかの理由で偏心反力が生じた状態を考える。さて逆対称の反力を対して桁に発生する力は下図のように分けることができるが、ここでは図-10 b)の場合の断面変形によって生ずる応力を検討する³⁾。

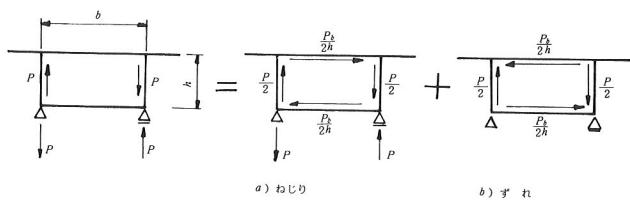


図-10 ねじりとずれの荷重分離

<仮定と計算方法>

中間支点上の桁部について考える。桁は中間支点から両側に無限に長いものとする。又実際には、所々に隔壁があるが、今回はその影響を考えないものとする。箱桁を構成する板は初等曲げ理論が成立つものとする。

4-1 横方向の変形と応力

軸方向の要素 $dx=1$ について考える。横方向要素に作用する力は、外力によるセン断流と、曲げねじりによって生ずるセン断流の和である。（図-11で \bar{P}_s は外力によるセン断流、 d_T は曲げねじりによる合セン断流。 q_z はそれらの和をあらわす。

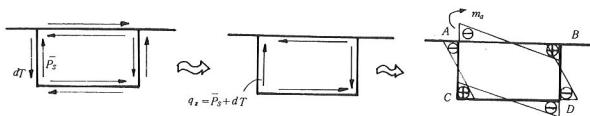


図-11 横方向曲げモーメント

箱桁断面の床版とウエブの断面二次モーメント(図-12)をそれぞれ、

$$I_o^R = \frac{1 \cdot t_o^3}{12} \quad (\text{m}^4 / \text{m})$$

$$I_u^R = \frac{1 \cdot t_u^3}{12} \quad (\text{m}^4 / \text{m})$$

$$I_s^R = \frac{1 \cdot t_s^3}{12} \quad (\text{m}^4 / \text{m})$$

とする。上下床版及び左右ウエブの相対変位1を生じさせるのに必要なセン断力は、たわみ角法で求めることができる。それらを用いて、それぞれウエブ合セン断力 q_z 及び床版の合セン断力 q_y と変形角 γ との関係式が得られる。

$$q_z'' = -\frac{EK}{b^2} \gamma'' \quad (11)$$

$$q_y'' = \frac{EK}{bh} \gamma'' \quad (12)$$

ただし

$$K = \frac{12 [6 I_o^R I_u^R h + b I_s^R (I_o^R + I_u^R)]}{I^R \cdot b + 2 h (I_u^R + I_o^R) + 3 \frac{I_o^R I_u^R}{I^R} \cdot \frac{h^2}{6}} \quad (\text{m}^4 / \text{m})$$

を得る。

4-2 箱要素の釣合い

図-12に示す記号を用いる。断面に生ずる軸力、セン断力、曲げの釣合式と、接合面での力の連続条件ー例えば上床版と右ウエブおよび下床版と右ウエブのそれぞれの接合面で垂直応力は等しいーから次式が得られる。

$$M_u = -\frac{I_u}{I_o} \frac{b^2 y_u F + 2h I_o}{b^2 y_o F + 2h I_u} M_o^W = -\alpha M_o \quad (13)$$

$$M_s = -\frac{I}{y_o} \left(\frac{1-\alpha}{bF} + \frac{b}{2I_o} \right) M_o = -\beta M_o \quad (14)$$

ここで M_u ; 下床版曲げモーメント
 M ; ウエブ曲げモーメント
 M_o ; 上床版曲げモーメント
 I_o, I_u, I ; 上下床版及びウエブ断面二次モーメント
 F ; ウエブ断面積

である。

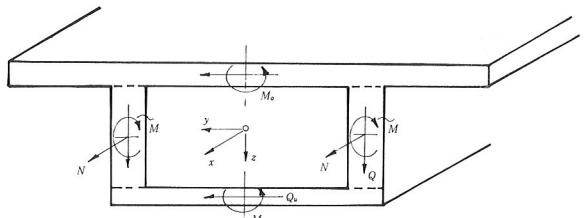
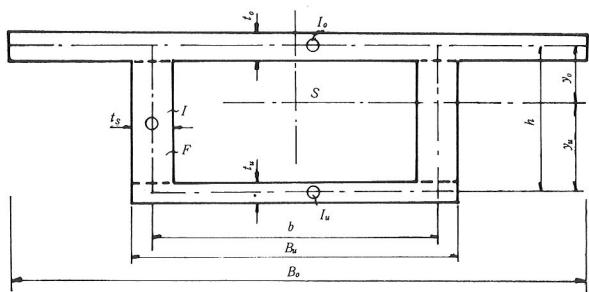
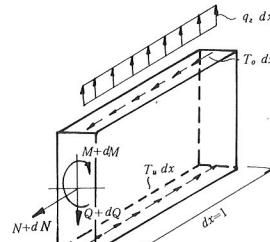


図-12 断面寸法と断面力

図-13 ウエブ $dx=1$ 要素、作用力

次にウエブ部材の釣合い式(図-13)に、(13), (14)式を代入すると、次式が得られる。

$$b \left(\beta + \frac{y_o}{b} + \alpha \frac{y_u}{b} \right) M_o^W - b q_z' - h q_y'' = 0 \quad (15)$$

y_o, y_u はウエブの重心から上、下縁までの距離

4-3 微分方程式と解

さて上床版の曲げモーメント M_o (軸方向)と断面変形角(横方向)を結びつけると、

$$r'' = \frac{M_o}{E} \left(\frac{2}{b} \frac{\beta}{I} + \frac{1}{hI_o} + \frac{\alpha}{hI_u} \right) \quad (16)$$

ここで(15)式に(11), (12)式さらに(16)式を代入すると、上床版曲げモーメントに関する微分方程式が得られる。(17)式

$$M_o'' + 4\alpha^4 M_o = 0 \quad (17)$$

$$a = \sqrt{\frac{\rho K}{2b^2 \epsilon}} \quad [m^{-1}] \quad (18)$$

ここに

$$\epsilon = \beta + \frac{y_o}{b} + \alpha \frac{y_u}{b}$$

$$\rho = \frac{2\beta}{bI} + \frac{1}{hI_o} + \frac{\alpha}{hI_u} \quad [m^{-5}]$$

である。

4-4 微分方程式の解

(17)式を次の境界条件で解くことになるが、

- 1) $x \rightarrow \infty, M_o = 0$
- 2) $x \rightarrow \infty, r = 0$
- 3) $x = 0, Q_o = \frac{Pb}{4h}, Q = -\frac{P}{4}$
- 4) $x = 0, r' = 0$

(17)式の一般解は次式で与えられる。

$$M_o = e^{ax} (ACosax + BSinax) + e^{-ax} (CCosax + DSinax) \quad (19)$$

上述の境界条件を満足する解を求める、変形と断面力が得られる。以下文献(3)により結果を記す。

$$\begin{aligned} \text{曲げモーメント} \quad M_o &= \frac{P}{4\alpha\epsilon} \eta_M(x) \\ M_u &= -\frac{\alpha P}{4\alpha\epsilon} \eta_M(x) \\ M_s &= -\frac{\beta P}{4\alpha\epsilon} \eta_M(x), \\ \eta_M(x) &= e^{-ax} (\sin ax - \cos ax) \end{aligned}$$

$$\text{変形} \quad r = \frac{P\rho}{8a^3\epsilon E} \eta(x)$$

$$\text{横方向合力} \quad q_y = \frac{P}{8a^3\epsilon} \frac{K\rho}{bh} \eta(x)$$

$$q_z = -\frac{P}{8a^3\epsilon} \frac{K\rho}{b^2} \eta(x), \quad \eta(x) = \bar{e}^{ax} (\sin ax + \cos ax)$$

$$\text{横方向曲げモーメント} \quad m_A = -m_B = \frac{b}{2(1+r)} q_z$$

$$m_C = -m_D = -\gamma m_A$$

$$r = \frac{r_o + 3}{r_u + 3}, \quad r_o = \frac{bI^R}{hI_u^o}$$

$$r_u = \frac{bI^R}{hI_u^R}$$

5. 計算結果

図-4 b の断面について断面変形による垂直応力、横方向曲げモーメントを求める。ウェブ下に作用する力は $P = 100 \text{ t}$ とする。

断面定数

$$y_o = y_u = \frac{h}{2} = 1.02 \text{ (m)}$$

$$I_u = \frac{t_u B_u^3}{12} = 4.50 \text{ (m}^4\text{)}$$

$$I_o = \frac{t_o B_o^3}{12} = 36.42 \text{ (m}^4\text{)}$$

$$I = \frac{t_s h^3}{12} = 0.23 \text{ (m}^4\text{)}$$

$$F = 0.885 \text{ (m}^4\text{)}$$

$$\alpha = 0.4759$$

$$\beta = 0.0415$$

$$\epsilon = 0.3152$$

$$\rho = 0.1306 \text{ (m}^{-5}\text{)}$$

$$I_o^R = \frac{1 \cdot t_o^3}{12} = 0.0018 \text{ (m}^4/\text{m})$$

$$I_u^R = \frac{1 \cdot t_u^3}{12} = 0.0013 \text{ (m}^4/\text{m})$$

$$I^R = \frac{1 \cdot t_s^3}{12} = 0.0104 \text{ (m}^4/\text{m})$$

$$K = 0.0354 \text{ (m}^4/\text{m})$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{0.1306 \times 0.0354}{2 \times 5.5^2 \times 0.3152}} = 0.1248 (m^{-1})$$

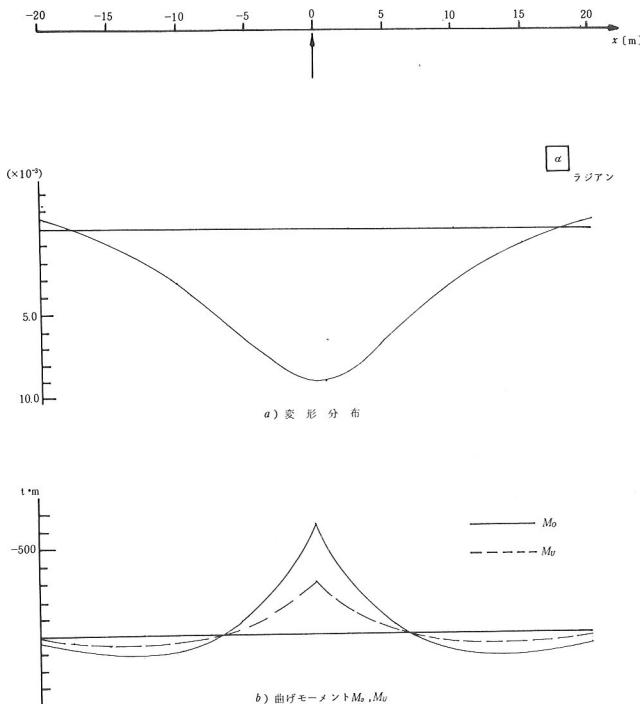


図-14 軸方向分布

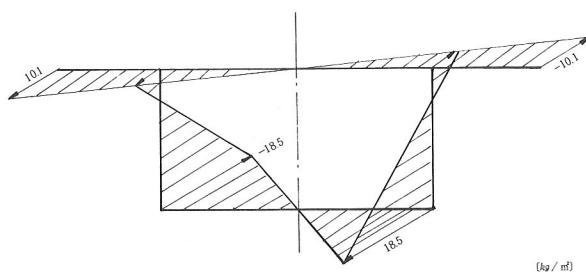


図-15 垂直応力分布

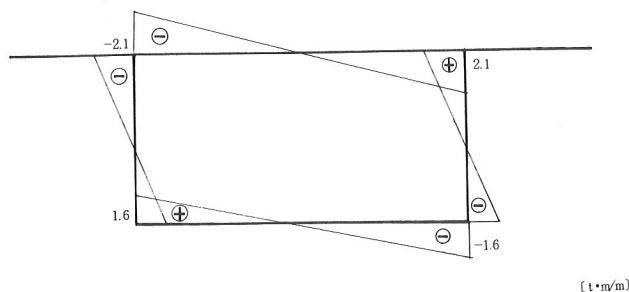


図-16 横曲げモーメント

$P = 100$ tは、支点反力が500 tの場合、その2割が偏心した反力の大きさで、約550 t·mのねじりモーメントが作用することになる。図-15と図-16は、断面変形によって支点上断面に生じる直応力分布及び横曲げモーメント図である。ウェブ下端では、最大垂直応力が発生し、-18.5 kg/cm²となる。これは同一断面の三径間連続桁で死荷重によって中間支点に反力500 tが生ずる場合、その支点上に発生する曲げ垂直応力に比べると約55%にあたる。しかし断面変形による影響は、支点付近から離れると、急激に減少して行く。横曲げモーメント図から最大曲げモーメントは、2.1 t·m発生しているが、さほど大きい値ではないが、上床版下のウェブに軸方向にひびわれが発生する恐れがあるので注意する必要がある。

6. まとめ

以上押出し施工時に遭遇すると思われる特殊な場合について、応力検討を行った。しかしながらこれらは、実際現場ではしばしば発生するものと思われる。例えば、非対称な断面を有する橋の場合、あるいは、曲線桁橋に押出し施工法を用いた場合には、比較的大きい偏心反力が生じ、上述したような応力が発生するものと思われる。しかし、実際と今回用いた仮定とは多少異なり、実際には、所々隔壁が設けられるので、今回の計算値よりも小さいものと思われる。隔壁の施工は、比較的困難を伴うので、設計上許されるだけ隔壁を少なくするのがよいが、そのような場合の応力検討法として上述の計算方法を利用することができる。

沓の設置は、レベルでチェックしながら精度よく行われるが、施工誤差をできるだけ小さくすることが必要である。いずれにしても、色々の場合を考慮して、仮設時のプレストレス力に余裕をもたせることが必要である。

参考文献

- 1) 小松定夫；薄肉構造物の理論と計算 山海堂
- 2) TU Stuttgart ; Torsion und Profilverformung dünnwandiger Stäbe
- 3) M.Mrotzek ; Berechnung von Hohlkastenträgern ohne Querschott Beton und Stahlbetonbau 1971 Heft 12
- 4) 得能達雄・森本洋三；川田技報 Vol. 1. 2