

【プログラム解説】

地震応答解析プログラム

Program for Earthquake Response Analysis

梅澤宣雄*
Nobuo UMEZAWA

1. はじめに

橋梁の耐震設計は一般的な橋梁では震度法が慣用されている。震度法は地震の影響を設計震度によって表わし、地震時の構造物の動的挙動を設計計算の便宜上静的な慣性力におきかえて、これが構造物各部に均等に作用するものとして、応力や安定性などを検討する方法である。この方法により、実用上十分安全な設計がなされてきた。

しかし、吊橋、斜張橋や高橋脚橋梁などのスレンダーな構造物や大型構造物、また、軟弱地盤上の構造物等の特殊な構造物に対して、安全かつ合理的な設計を行うために、震度法にかわって地震応答解析が用いられている。地震応答解析は地震動を動的に扱い、応答スペクトル解析法や時刻歴応答解析法（この中にはモード解析法や直接数値積分法がある）などの方法がある^{1)~3)}。当社においても地震応答解析プログラムを開発して設計に供しているので、このプログラムの概要を紹介する。

2. プログラム概要

地震応答解析プログラムは下記の機能をもっている。

- 1) 地震応答解析法として次の方法が可能である。
 - i) 固有周期（又は固有振動数）と固有振動モードの計算
 - ii) 応答スペクトル解析法による最大応答値の計算
 - iii) モード解析法による時刻歴応答解析
 - iv) 直接数値積分法による時刻歴応答解析
- 2) 解析可能な構造物として次の種類がある
 - i) 平面トラス
 - ii) 平面骨組
 - iii) 平面格子
 - iv) 立体トラス
 - v) 立体骨組
 - vi) 二次元弾性体
 - vii) 三次元弾性体
- 3) 慣性力は各節点に集中させた集中質点系として取扱う。

- 4) 部材特性は完全弾性体として取扱う。
- 5) 部材の剪断変形が考慮できる。
- 6) 部材の初期軸力を入力することにより初期応力剛性が考慮できる。
- 7) 剛体および剛体のばね支持が考慮できる。
- 8) 減衰の取扱いは次の方法が可能である。
 - i) 減衰定数一定
 - ii) 運動エネルギーに占める各種類の分担割合に比例する減衰
 - iii) 質量又は剛性あるいはこの両者に比例する減衰
- 9) 固有値計算の結果をファイルに格納して、以後応答計算を改めて行うことができる。
- 10) スケルトン、固有振動モード及び変位や部材力の時刻歴応答をディスプレイ又はドライバーに描画することができる。

3. 地震応答解析の基本式

多質点系構造物が地震外力をうけるときの運動方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = -\mathbf{M}\mathbf{F}\ddot{\mathbf{z}}(t) \quad (1)$$

ここで \mathbf{M} は質量マトリックス、 \mathbf{C} は減衰マトリックス、 \mathbf{K} は剛性マトリックス、 \mathbf{F} は地震の作用方向に関する割合を示すマトリックス、 \mathbf{X} は変形ベクトル、 \mathbf{z} は地盤の変形、変数の上につけた \cdot は時間についての微分を表わすものとする。

今回は慣性力として各節点に集中させた集中質点系として取扱うので、質量マトリックスは対角要素のみとなる。また、質量マトリックスは各節点の質量および回転慣性から構成される。

次に、減衰マトリックスは各解析方法によって異なるので後で述べるとして、以下剛性マトリックスについて述べる。

* 川田工業技術本部研究室係長

3-1 構造物の剛性マトリックス

3-1-1 部材の剛性マトリックス

図-1に示すように、部材のA端とB端を適当に定め、A端からB端へ向う方向を u 軸の正、右手系でこれと直交する2方向を v , w 軸とする。これを部材座標系と呼ぶ。平面と格子構造では各部材の w 軸が全体座標系の Z

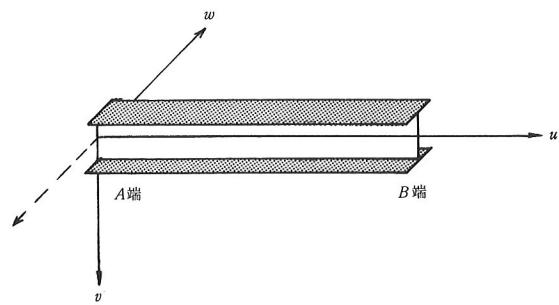


図-1 部材座標（右手座標系）

$$\begin{bmatrix} N_a \\ S_{va} \\ M_{wa} \\ \dots \\ N_b \\ S_{vb} \\ M_{wb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_w}{l^3(1+\phi_v)} & \frac{6EI_w}{l^2(1+\phi_v)} \\ 0 & \frac{6EI_w}{l^2(1+\phi_v)} & \frac{(4+\phi_v)EI_w}{l(1+\phi_v)} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_w}{l^3(1+\phi_v)} & \frac{-6EI_w}{l^2(1+\phi_v)} \\ 0 & \frac{6EI_w}{l^2(1+\phi_v)} & \frac{(2-\phi_v)EI_w}{l(1+\phi_v)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_w}{l^3(1+\phi_v)} & \frac{6EI_w}{l^2(1+\phi_v)} \\ 0 & \frac{-6EI_w}{l^2(1+\phi_v)} & \frac{(2-\phi_v)EI_w}{l(1+\phi_v)} \\ \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_w}{l^3(1+\phi_v)} & \frac{-6EI_w}{l^2(1+\phi_v)} \\ 0 & \frac{-6EI_w}{l^2(1+\phi_v)} & \frac{(4+\phi_v)EI_w}{l(1+\phi_v)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ \vartheta_{wb} \\ u_b \\ u_b \\ \vartheta_{wb} \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで $\phi_v = \frac{6EI_w}{GA_{sv}l^2}$, N : 軸力, S_v : v 軸方向剪断力, M_w : w 軸回り曲げモーメント, l : 部材長, A : 断面積, A_{sv} : v 軸方向有効剪断断面積, I_w : w 軸回り断面二次モーメント, E : 弾性係数, G : 剪断弾性係数, サフィックス a , b : A端およびB端を表わす。

3-1-2 部材座標と空間座標

節点での平衡方程式を表わすためには、部材毎の座標系では不便であるので、すべての部材に共通な空間座標を考え、変形および断面力はすべて空間座標で表わす。

軸と平行で、しかも、同じ方向に定義する。変形と断面力の方向を図-2で示すように定義すると、部材座標系

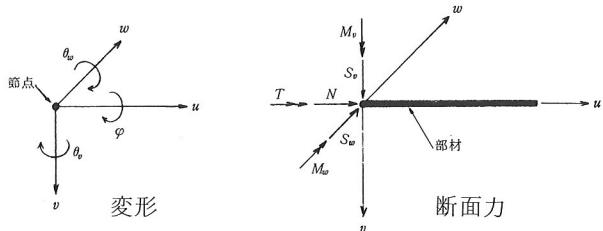


図-2 変形と断面力の正の方向

でつくられた部材の変形条件式は次のようにになる。

$$\begin{bmatrix} f_a \\ f_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f'_a \\ f'_b \end{bmatrix} \quad (2)$$

節点荷重のみを考慮する時は $f'_a = 0$, $f'_b = 0$ となるので、以下これを省略する。上式を平面骨組構造について具体的に表わすと次のようになる。

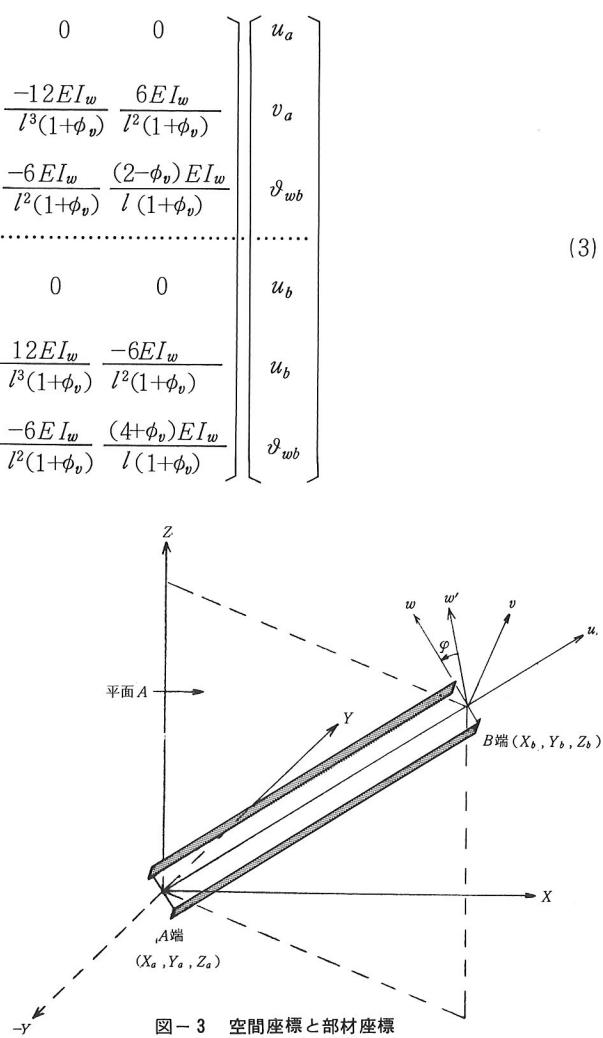


図-3 空間座標と部材座標

図-3に示す空間座標は原点 (X_o, Y_o, Z_o) より (X_a, Y_a, Z_a) だけ平行移動して示してある。

変形の空間座標系の成分 x_a, x_b と部材座標系の成分 u_a, u_b の間には次の関係式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T & 0 \\ 0 & c^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここで c は部材座標から空間座標への座標変換行列である。上式を式(2)に代入すると、

$$\begin{bmatrix} f_a \\ f_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{aa}c^T & k_{ab}c^T \\ k_{ba}c^T & k_{bb}c^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \quad (5)$$

となり、A端およびB端の断面力が求まる。

一方、断面力の空間座標系の成分 n_a, n_b と部材座標系の成分 f_a, f_b の間には次の関係式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} n_a \\ n_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \end{bmatrix} \quad (6)$$

上式に式(5)を代入すると、

$$\begin{bmatrix} n_a \\ n_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ck_{aa}c^T & ck_{ab}c^T \\ ck_{ba}c^T & ck_{bb}c^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \quad (7)$$

となり、上式の右辺第一項が空間座標でつくられた部材の剛性マトリックスである。断面力および変形が空間座標系の成分で表わされていると、節点の平衡条件式は各部材の代数和で表せることができる。

なお、座標変換行列 c は平面骨組構造の場合次式で表わすことができる。

$$c = \begin{bmatrix} \frac{X}{l} & -\frac{Y}{l} & 0 \\ \frac{Y}{l} & \frac{X}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここで、 $X = X_a - X_b$, $Y = Y_a - Y_b$, l は部材長であり、A端およびB端の空間座標が各々 (X_a, Y_a) , (X_b, Y_b) である。

3-1-3 全体の剛性マトリックス

構造物に含まれるすべての部材について、空間座標系でつくられた部材の剛性マトリックスを計算して部材番号順に並べると

$$\begin{bmatrix} N_a \\ N_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CK_{aa}C^T & CK_{ab}C^T \\ CK_{ba}C^T & CK_{bb}C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix} \quad (9)$$

が得られる。上式は各部材をひとまとめにしただけであるので、各部材を節点で接続して構造物として成立させるためには、節点で断面力が釣合い、変形が連続する必要がある。

1) 節点の釣合い条件式

各部材の材端断面力は空間座標系の成分で表わされているので、それぞれの節点に集まる部材の材端の断面の合力を計算するためには代数和をとればよい。すなわち、

$$\alpha N_a + \beta N_b = P_P \quad (10)$$

ここで、 α , β は構造物の形状を表わす形状行列であり、 m 部材の A端 (又は B端) が k 節点に接続するとき、 α (又は β) の pm 要素を (M, M) の単位行列 E にして、その他の要素は零行列にすればよい。ここで M は 1 節点の自由度数であり、平面骨組構造の場合 3 である。

2) 節点の変形条件式

部材端の変形とそれが接続する節点の変形は等しいことから次式が成立する。

$$\begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \end{bmatrix} X \quad (11)$$

式(9)を式(10)に代入して、式(11)を用いて X_a, X_b を X に置き換えると次式が得られる。

$$[\alpha \beta] \begin{bmatrix} CK_{aa}C^T & CK_{ab}C^T \\ CK_{ba}C^T & CK_{bb}C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \end{bmatrix} X = P_P \quad (12)$$

上式の左辺の係数行列が構造物全体の剛性マトリックスであり、右辺が節点に作用する荷重である。今後上式を簡単に次式で表わす

$$K X = P_P \quad (13)$$

3-1-4 初期応力剛性マトリックス

構造物が大変形を伴う場合、変形後の構造状態において力の釣合い方程式を立てる必要がある。この場合、変形が大きいので、剛性マトリックスの計算には、ひずみと変位の関係式中に非線形項が入ってくる。高次の項を省略すれば、部材の剛性マトリックス K は次の形に修正することができます。

$$K = K_E + K_G \quad (14)$$

ここで、 \mathbf{k}_E は式(2)に示した弾性剛性マトリックス、 \mathbf{k}_G は初期応力剛性マトリックスである。平面骨組構造物について \mathbf{k}_G を具体的に表わしてみる。

$$\mathbf{k}_G = \frac{F}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{l}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{l}{10} \\ 0 & \frac{l}{10} & \frac{2l^2}{15} & 0 & -\frac{l}{10} & -\frac{l^2}{30} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{l}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{l}{10} \\ 0 & \frac{l}{10} & -\frac{l^2}{30} & 0 & -\frac{l}{10} & \frac{2l^2}{15} \end{bmatrix} \quad (15)$$

ここで l は部材長、 F は軸力で引張力が正、圧縮力が負である。

今回の解析においては式(14)の \mathbf{k}_G が振動中も一定、すなわち、式(15)からわかるように軸力が一定であると仮定する。

3-1-5 剛体の剛性マトリックス

節点付近に剛性の強い部分があり剛体とみなせる場合、この部材は弾性変形する部分と剛体変形する部分に分けて考えることができる。弾性変形する部分については前に示したので、剛体変形する部分について考える。図-4を参照すると、剛域の外側 C に生ずる断面力と弾性部材端 A に生ずる断面力の間には、平面骨組構造物の場合次の関係式がある。なお、断面力の釣合いは空間座標で考えるものとする。

$$\begin{bmatrix} N_c \\ S_{yc} \\ M_{zc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4y & 4x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_a \\ S_{ya} \\ M_{za} \end{bmatrix} \quad (16)$$

上式を簡単のため

$$\mathbf{n}_c = \mathbf{s}_a \mathbf{n}_a \quad (17)$$

と表わす。一方、他端についても $\mathbf{n}_d = \mathbf{s}_b \mathbf{n}_b$ と表わすことができ、まとめると次のように表わすことができる

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n}_c \\ \mathbf{n}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_a & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{s}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_a \\ \mathbf{n}_b \end{bmatrix} \quad (18)$$

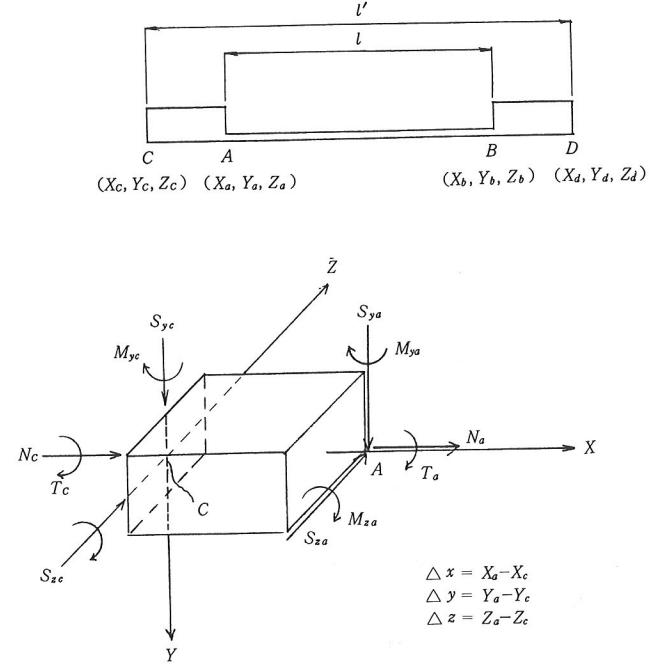


図-4 剛体の断面力の釣合い

一方、 A 端および B 端の変形 \mathbf{x}_a 、 \mathbf{x}_b は C 端および D 端の変形 \mathbf{x}_c 、 \mathbf{x}_d を用いると次式で表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_a^T & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{s}_b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix} \quad (19)$$

式(18)に式(7)を代入し、 \mathbf{x}_a 、 \mathbf{x}_b を上式でおきかえると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n}_c \\ \mathbf{n}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_a \mathbf{c} \mathbf{k}_{aa} \mathbf{c}^T \mathbf{s}_a^T & \mathbf{s}_a \mathbf{c} \mathbf{k}_{ba} \mathbf{c}^T \mathbf{s}_b^T \\ \mathbf{s}_b \mathbf{c} \mathbf{k}_{ba} \mathbf{c}^T \mathbf{s}_a^T & \mathbf{s}_b \mathbf{c} \mathbf{k}_{bb} \mathbf{c}^T \mathbf{s}_b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix} \quad (20)$$

上式が部材 CD の空間座標における剛性マトリックスである。

3-1-6 弾性床上の剛体の剛性マトリックス

ケーロンや橋台などの力学的な挙動は弾性床上の剛体と仮定することができます。この場合の剛体の空間座標での剛性マトリックス \mathbf{k}_G は次式で表わせる。

$$\mathbf{k}_G = \mathbf{s}_a \mathbf{k}_P \mathbf{s}_a^T \quad (21)$$

ここで \mathbf{s}_a は式(16)又は式(18)と同一の変位変換マトリックスであり、 \mathbf{k}_P は剛体に接する任意点の空間座標での剛性マトリックスである。平面骨組構造の場合、図-5に示すように

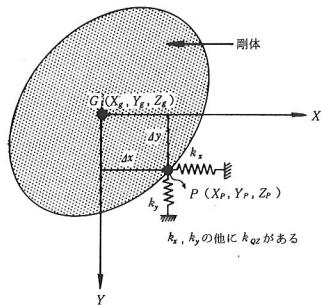


図-5 弾性床上の剛体

$$\mathbf{k}_P = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_{θz} \end{bmatrix} \quad (22)$$

と仮定するならば、 \mathbf{k}_G は次式で表わされる。

$$\mathbf{k}_G = \begin{bmatrix} k_x & 0 & -k_x \cdot Δy \\ 0 & k_y & k_y \cdot Δx \\ -k_x \cdot Δy & k_y \cdot Δx & k_{θz} + k_x \cdot Δy^2 + k_y \cdot Δx^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

式(22)と(23)で k_x はX方向ばね定数、 k_y はY方向ばね定数、 $k_{θz}$ はZ軸回りばね定数である。

3-2 固有振動数と固有振動モード

構造物の振動特性を最も良く表わすものとして、固有振動数又は固有周期と固有振動モードがある。今、式(1)の多質点系構造物の運動方程式において、右辺の外力項を零にして左辺の減衰力を省略すれば、減衰のない自由振動の運動方程式が得られる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (24)$$

各節点の振動を正弦波で仮定すると、

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} \sin \mathbf{p}t \quad (25)$$

とおくことができる。上式を式(24)に代入すると、

$$-(\mathbf{M}\mathbf{p}^2 - \mathbf{K})\mathbf{x} \sin \mathbf{p}t = \mathbf{0} \quad (26)$$

が得られる。上式が零でない解 \mathbf{x} をもつためには係数行列が零にならなければならない。すなわち、

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x}\mathbf{p}^2 \quad (27)$$

上式は一般的な固有値問題であるが、標準型の固有値問題 ($\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{p}^2\mathbf{x}$) にするために、質量マトリックスを

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}\mathbf{m}^T \quad (28)$$

と表わせば、式(27)は次のようになる。

$$(\mathbf{m}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{m}^{-T}) \mathbf{Φ} = \mathbf{p}^2 \mathbf{Φ} \quad (29)$$

ここで $\mathbf{Φ} = \mathbf{m}^T \mathbf{x}$ である。上式は標準型の固有値問題あり、今回はGivens-Householder法とJennings法により固

有値 \mathbf{p}^2 と固有ベクトル $\mathbf{Φ}$ を求める。固有円振動数は

p_i ($i=1 \sim N$) であり、固有振動モードは

$$\mathbf{x} = \mathbf{m}^{-T} \mathbf{Φ} \quad (30)$$

より求められる。

3-3 直接数値積分法

式(1)に示した多質点系構造物の運動方程式の解は、直接数値積分することによって得ることができる。今回はWilsonのθ法を用いる。この方法は図-6に示すように、加速度が時刻 t から時刻 $t+\tau$ ($\tau = \theta \cdot \Delta t$) まで線形に変化するものと仮定する。ここで $\theta \geq 1$ であるが、 $\theta = 1$ のとき一般の線形加速度法になる。

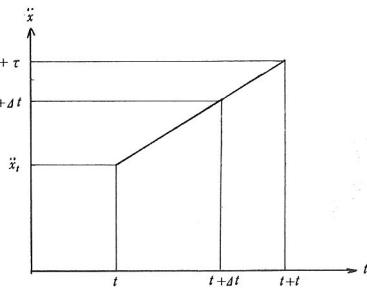


図-6 加速度の変化

上述の仮定をすると、時刻 $t+\tau$ の速度と変形は

$$\dot{\mathbf{x}}_{t+\tau} = \dot{\mathbf{x}}_t + \frac{\tau}{2} (\ddot{\mathbf{x}}_t + \ddot{\mathbf{x}}_{t+\tau})$$

$$\mathbf{x}_{t+\tau} = \mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t \tau + \frac{\tau^2}{6} (2\ddot{\mathbf{x}}_t + \ddot{\mathbf{x}}_{t+\tau}) \quad (31)$$

上式の第二式を変形してその結果を第一式に代入すると次式が得られる。

$$\ddot{\mathbf{x}}_{t+\tau} = \frac{6}{\tau^2} (\mathbf{x}_{t+\tau} - \mathbf{x}_t) - \frac{6}{\tau} \dot{\mathbf{x}}_t - 2\ddot{\mathbf{x}}_t \quad (32)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{t+\tau} = \frac{3}{\tau} (\mathbf{x}_{t+\tau} - \mathbf{x}_t) - 2\dot{\mathbf{x}}_t - \frac{\tau}{2} \ddot{\mathbf{x}}_t$$

運動方程式は時刻 $t+\tau$ においても満足されなければならないので次式が成立する。

$$M\ddot{\mathbf{x}}_{t+\tau} + C\dot{\mathbf{x}}_{t+\tau} + K\mathbf{x}_{t+\tau} = P_t + \theta(P_{t+\Delta t} - P_t) \quad (33)$$

ただし、式(1)の右辺は P_t で示してある。上式に式(32)を代入する。尚、減衰 C は質量 M と剛性 K の線形結合であると仮定する。

$$C = aM + bK \quad (34)$$

結果のみを示せば次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \bar{K} \bar{x} = \bar{P} \\
& \bar{K} = K + b_2 M \\
& \bar{x} = b_o x_{t+\tau} - b B_t \\
& \bar{P} = P_t + \theta (P_{t+\Delta t} - P_t) + M(A_t + b_3 B_t) \\
& b_0 = 1 + \frac{3}{\tau} b \\
& b_1 = \frac{6}{\tau^2} + \frac{3}{\tau} a \\
& b_2 = \frac{b_1}{b_o} \\
& b_3 = a - b_2 b \\
& A_t = \frac{6}{\tau^2} x_t + \frac{6}{\tau} \dot{x}_t + 2 \ddot{x}_t \\
& B_t = \frac{3}{\tau} x_t + 2 \dot{x}_t + \frac{2}{\tau} \ddot{x}_t
\end{aligned} \tag{35}$$

上式より \bar{x} が計算できれば、 $x_{t+\tau}$ は次式より求まる。

$$x_{t+\tau} = \frac{1}{b_o} (\bar{x} + b B_t) \tag{36}$$

$x_{t+\tau}$ が求まれば、式(32)より $\ddot{x}_{t+\tau}$ と $\dot{x}_{t+\tau}$ が求まる。希望する時刻 $t + \Delta t$ における加速度、速度および変形は式(31)を参照すれば、線形加速度の仮定より次式より求めることができる。

$$\begin{aligned}
& \ddot{x}_{t+\Delta t} = (1 - \frac{1}{\theta}) \ddot{x}_t + \frac{1}{\theta} \ddot{x}_{t+\tau} \\
& \dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{x}_t + \ddot{x}_{t+\Delta t}) \\
& x_{t+\Delta t} = x_t + \dot{x}_t \Delta t + \frac{\Delta t^2}{6} (2 \ddot{x}_t + \ddot{x}_{t+\Delta t})
\end{aligned} \tag{37}$$

以上は一質点系の運動方程式の直接数値積分を示したが、多質点系の場合は式(35)をマトリックス表示した次の連立一次方程式を解くことになる。

$$\begin{aligned}
& \bar{K} \bar{X} = \bar{P} \\
& \bar{K} = K + b_2 M \\
& \bar{X} = b_o X_{t+\tau} - b B_t \\
& P = P_t + \theta (P_{t+\Delta t} - P_t) + M(A_t + b_3 B_t) \\
& b_0 = 1 + \frac{3}{\tau} b \\
& b_1 = \frac{6}{\tau^2} + \frac{3}{\tau} a \\
& b_2 = \frac{b_1}{b_o} \\
& b_3 = a - b_2 b \\
& A_t = \frac{6}{\tau^2} X_t + \frac{6}{\tau} \dot{X}_t + 2 \ddot{X}_t \\
& B_t = \frac{3}{\tau} X_t + 2 \dot{X}_t + \frac{2}{\tau} \ddot{X}_t
\end{aligned} \tag{38}$$

上式より \bar{X} が計算できれば $X_{t+\tau}$ も容易に計算でき、以下の手順は一質点系の場合と同じである。

式(38)は微小時間 Δt 毎に解くことになるが、これらの式で計算の間で変化するのは右辺だけであって、左辺の係数行列は変化しない。それゆえ、繰返し計算に入る前に左辺の係数行列を三角化しておけば、繰返し計算の中では前進代入と後退代入を一回づつ実行するだけで解が求められる。

3-4 モード解析法

3-2 で求めた固有振動モードを用いて、地震波を入力して構造物の応答解析を行う方法である。本方法は固有振動モード Φ を用い変形ベクトル X を Y に変換する

$$X = \Phi Y \tag{39}$$

Φ としてはすべての振動モードを用いる必要はなく、振動の大勢を支配する m 組の振動モードを採用する。式(39)を式(1)の運動方程式に代入して、左から Φ^T を掛けると次式が得られる。

$$\Phi^T M \ddot{Y} + \Phi^T C \dot{Y} + \Phi^T K \Phi Y = \Phi^T P_t \tag{40}$$

ただし、式(1)の右辺は P_t で示してある。然るに、固有振動モードの直交性より

$$\begin{aligned}
\Phi^T M \Phi &= E \\
\Phi^T K \Phi &= E p^2
\end{aligned} \tag{41}$$

が成り立っている。一方、減衰マトリックス C について

$$\Phi^T C \Phi = 2 h p \tag{42}$$

と固有円振動数に比例する減衰を仮定すれば、式(40)は次のようになる。

$$\ddot{Y} + 2 h p \dot{Y} + p^2 Y = \Phi^T P_t \tag{43}$$

上式は m 組の連立常微分方程式であるが、一行づつ分けて表わすと

$$\ddot{Y}_j + 2 h p_j \dot{Y}_j + p_j^2 Y_j = \sum_{k=1}^n \phi_{jk}^T P_k t \quad (j=1 \sim m) \tag{44}$$

となり変数 Y_j が完全に分離されている。それゆえ、数値積分を行えば Y が求まり、この結果を式(39)に代入すれば X が求まる。今回は数値積分法として Rung-Kutta-Gill 法を用いている。

地震応答解析にモード解析法や応答スペクトル解析法を用いる場合、すべての固有振動モードを計算に用いる必要はなく、振動の大勢を支配する幾組かの固有振動モードを採用すればよいことが知られている。幾組の固有振動モードを採用すれば、計算精度が確保できるかを判断するものとして、刺激係数と有効質量がある。

刺激係数 β とは j 次の規準振動系の応答が全応答に占める寄与の程度を示す係数で、次式で表わされる。

$$\beta_j = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{ij}}{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{ij}^2} \quad (45)$$

ここで m_i は各節点の質量又は回転慣性、 ϕ_{ij} は i 節点の j 次の固有振動振幅、 n は自由度数である。刺激係数の物理的な意味は、地震荷重のようにある特定の作用方向に変形可能な質点に、同時にしかも質量に比例した力が作用する場合は、質点に作用する荷重 P_i の代わりに m_i を用いたものが分子の項であり、いわば一般外力の係数に相当する。分母の項は規準質量である。従って、正規化条件を

$$\sum_{i=1}^n m_i \phi_{ij}^2 = 1 \quad (46)$$

にとって固有振動振幅 ϕ_{ij} に定めておけば、

$$\beta_j = \sum_{i=1}^n m_i \phi_{ij} \quad (47)$$

となる。

一方、全質量のうちの j 次振動の有効質量は次式によつて計算できる。

$$W_j = \frac{\left[\sum_{i=1}^n m_i \phi_{ij} \right]^2}{\sum_{i=1}^n m_i \phi_{ij}^2} \quad (48)$$

一般的には上式 W_j の累計が全質量に対するある一定以上の割合に達すれば計算精度が確保される。また、刺激係数と同様に固有振動モードが式(46)により正規化されていれば、

$$W_j = \left[\sum_{i=1}^n m_i \phi_{ij} \right]^2 \quad (49)$$

となる。

3-5 応答スペクトル解析

式(44)は Duhamel 積分公式を用いて次のように理論的に解くことができる。

$$Y_j = \sum_{k=1}^n \phi_{jk}^T S_{kj} \quad (j=1 \sim m) \quad (50)$$

$$S_{kj} = \frac{1}{p_j} \int_0^t \frac{P_k(\tau)}{\sqrt{1-h_j^2}} \exp\{-p_j h_j(t-\tau)\} \sin\{p_j \sqrt{1-h_j^2}(t-\tau)\} d\tau$$

S_{kj} を要素とする行列を \mathbf{S} とすれば、上式は次のように表わせる。

$$\mathbf{Y} = \text{Diag} (\Phi^T \mathbf{S}) \quad (51)$$

一方、変形は上式を式(39)に代入して求められる。

$$\mathbf{X} = \Phi \text{Diag} (\Phi^T \mathbf{S}) \quad (52)$$

最大値が問題のときは \mathbf{S} の要素に応答変位スペクトルを用いればよいが、各要素の最大値を加えあわせると結果が大きくなりすぎるので、各要素の自乗和の平方根をとることが多い。さらに、地震荷重の場合は $\mathbf{P}_t = -\mathbf{M}\mathbf{F}z(t)$ であるから S_{kj} のスペクトルは次のようになる。

$$S_{kj} = -\mathbf{M}\mathbf{F} (S_x)_{1j} \quad (53)$$

従つて、変形 X_i の最大値 $|X_i|_{max}$ は次式より計算できる。

$$|X_i|_{max} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left\{ \phi_{ij} \sum_{k=1}^n \phi_{kj} \mathbf{M}\mathbf{F} \right\}^2 \{(S_x)_{1j}\}^2} \quad (54)$$

なお、減衰が小さいものとすれば変位応答スペクトル S_x 、速度応答スペクトル S_v 、加速度応答スペクトル S_a の間には次の関係がある。

$$S_x = \frac{T}{2\pi} S_v = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 S_a \quad (55)$$

それゆえ、 S_x 、 S_v 、 S_a の1つがわかれれば他は容易に計算できる。上式で T は固有周期を表わす。

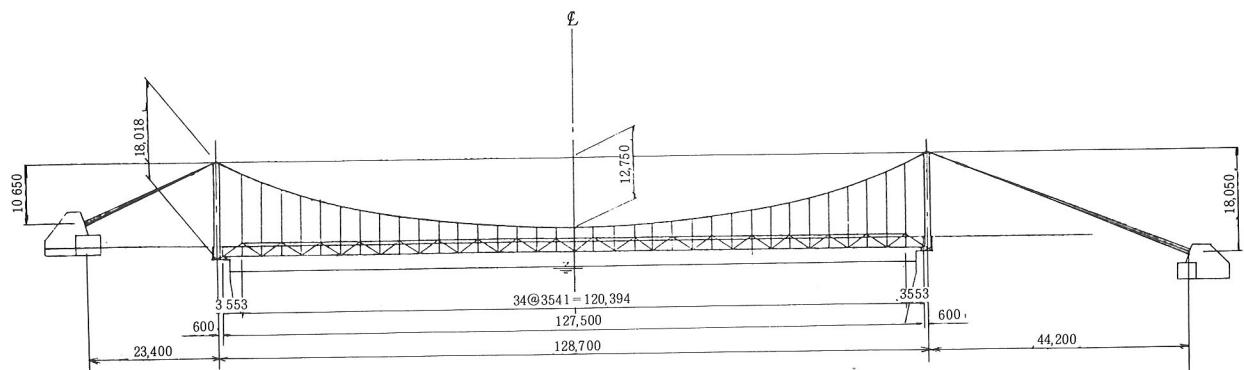


図-7 プログラム使用例（解析モデル）

4. プログラムの使用例

本プログラムを使用して、図-7に示す吊橋の固有振動数と固有振動モードおよび応答スペクトル解析した例を示す。応答スペクトル解析の結果は紙面の都合上省略して、固有振動数と固有モードの結果のみを図-8に示す。

参考文献

- 1) 土木学会編：地震応答解析と実例、技報堂、昭和48年1月。
- 2) 大地羊三：電子計算機の手法とその応用、森北出版、昭和46年5月。
- 3) 土質学会編：土と構造物の動的相互作用、土質工学会、昭和48年10月。

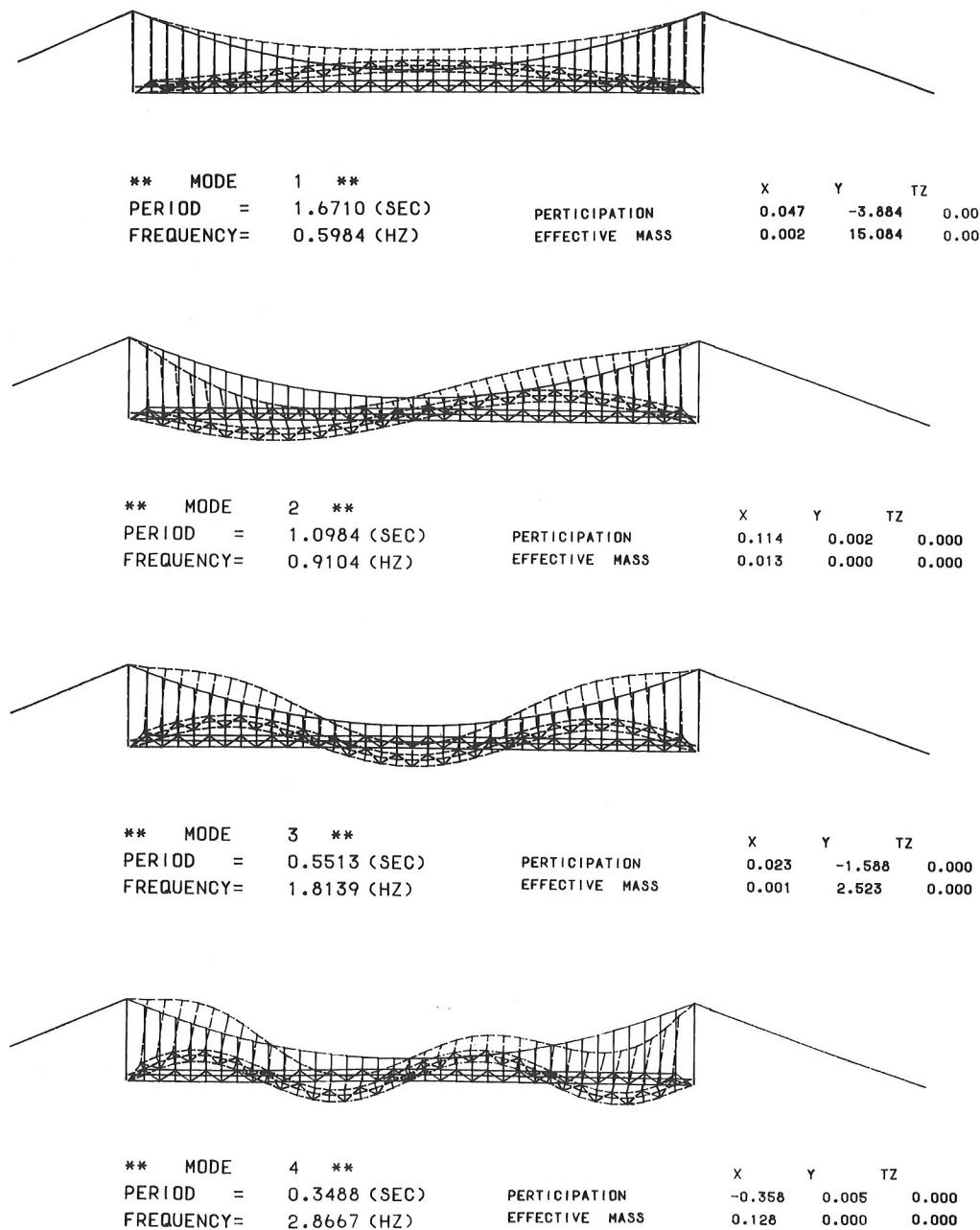


図-8 固有振動数と振動モード