

# Rayleigh-Ritz法による吊橋架設時の 固有振動解析

# Natural Vibration Analysis of Suspension Bridge during Construction by the Rayleigh-Ritz Method

中崎俊三\*

## 1. まえがき

本四連絡橋の吊橋のように架橋区間が主要航路でかつ潮流の厳しい場合の架設基本計画は、海面を使用した大ブロック架設工法の適用が困難な所から、架設途上での耐風安定性に配慮した張り出し架設を採用しているようである。

張り出し架設時の耐風安定性を検証する上で、その時の固有振動性状は予め把握されなければならない要件である。吊橋架設時の固有振動数の計算は、立体の離散系モデルで行われてきたが、データ作成並びに計算にかかる費用は多大なものである。

本文は吊橋完成状態についてハンガーを膜とみなして解析を行う周知の Rayleigh–Ritz 法を吊橋架設途上に応用したものを見たもので、膜理論としての特性上、容易に計算値を得ることができる。

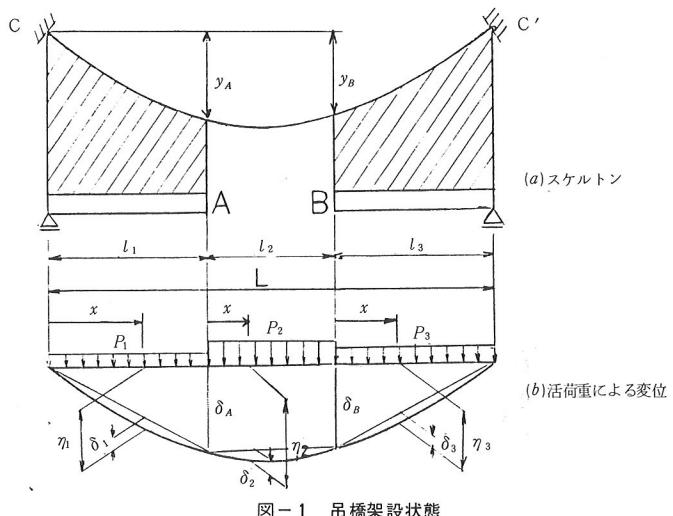
最初に先ず静的な鉛直面内の問題について各部のポテンシャルエネルギーを求め、その変分より求められた釣り合い方程式が満足されたものであることを確かめ、その後、固有振動数の計算式を展開する。鉛直振動・捩り振動共、同一の手法で計算できるので、ここでは離散系モデルの場合立体モデルとなる捩り振動について記述し、鉛直振動については省略する。

## 2. 吊橋架設時の静的な問題

## 2-1 各部のポテンシャルエネルギー

問題を簡単にする為に、図-1に示すように支間中央付近の桁が未だ架設されていない1ケーブル支間について考える。ケーブル支間が複数の場合、桁の中途中にヒンジがある場合も基本的には変わらない。

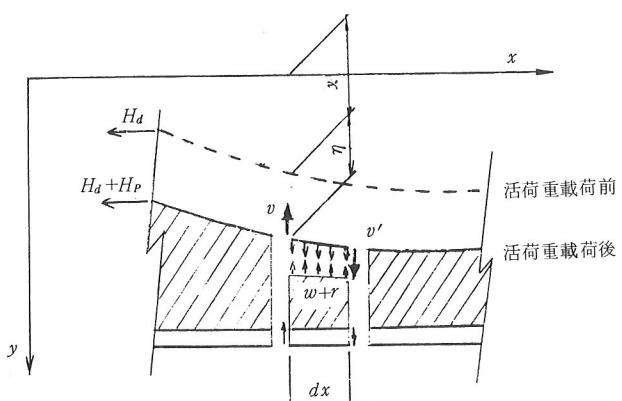
架設時のある状態 (a) に任意の活荷重  $P$  が載荷された時の変形を (b) のように仮定する。すなわち、たわみ  $\eta$  を次のように仮定する。(左側の桁に関して)



ここに  $\delta_1$ ; 柄の両端を結ぶ直線からのたわみ  
 $\delta_4$ ; 架設先端部での柄のたわみ

## 2 = 1 = 1 ケーブル一般部のポテンシャルエネルギー

図-2に関して  $dx$  区間のケーブルの鉛直方向の釣り合いをとる。

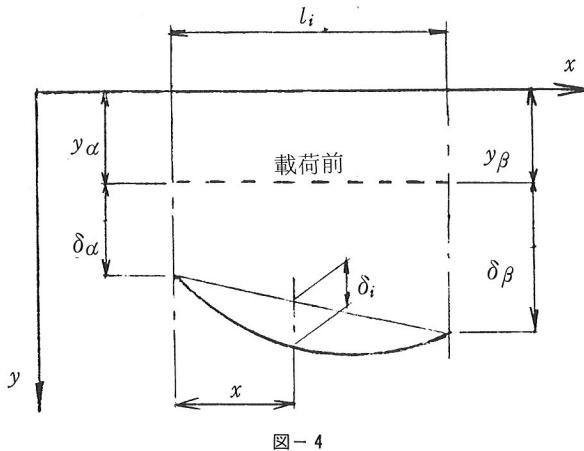


$w$  : 活荷重載荷前のケーブル 全分担力  
 $y$  : 活荷重載荷前のケーブルの綫距離  
 $H_d$  : 活荷重載荷前のケーブル水平張力  
 $r$  : 活荷重の載荷によるケーブル分担力の増加分  
 $H_p$  : 活荷重の載荷によるケーブル水平張力の増加分  
 $v, v'$  :  $dx$ 区間前後のケーブル張力の鉛直成分



2-2-1 (8)式の内の  $-\frac{1}{2}H_d \int_0^{l_i} \eta_i'' \eta_i dx$  についての  
変分

図-4において左端の変位を  $\delta_\alpha$ 、右端の変位を  $\delta_\beta$ 、変位後の左端と右端を結ぶ直線からの変位を  $\delta_i$  とする  
と全変位  $\eta_i$  は次式で表せる。



$$\left. \begin{aligned} \eta_i &= \delta_i + \delta_\alpha + \frac{\delta\beta - \delta\alpha}{l_i} x \\ \eta''_i &= \delta''_i \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (16)$$

$$-\frac{1}{2}H_d \int_0^{l_i} \eta_i'' \eta_i dx = -\frac{1}{2} H_d \int_0^{l_i} \delta_i'' (\delta_i + \delta_{\alpha} + \frac{\delta_{\beta} - \delta_{\alpha}}{l_i} x) dx \\ = -\frac{1}{2} H_d \int_0^{l_i} \left\{ \delta_i'' \delta_i + \delta_i'' \delta_{\alpha} \left( \frac{l_i - x}{l_i} \right) + \delta_i'' \frac{\delta_{\beta}}{l_i} x \right\} dx \dots \dots (17)$$

(17)式の右辺第1項目の第1変分を行う。

$$\begin{aligned} \Delta \int_0^{l_i} \delta_i'' \delta_i dx &= \int_0^{l_i} \Delta \delta_i'' \delta_i dx + \int_0^{l_i} \delta_i'' \Delta \delta_i dx \\ &= \left[ \Delta \delta_i' \delta_i \right]_0^{l_i} - \int_0^{l_i} \Delta \delta_i' \delta_i' dx + \int_0^{l_i} \delta_i'' \Delta \delta_i dx \\ &= \left[ \Delta \delta_i' \delta_i - \Delta \delta_i \delta_i' \right]_0^{l_i} + 2 \int_0^{l_i} \delta_i'' \Delta \delta_i dx \end{aligned}$$

上式で,  $\delta_i, \Delta\delta_i = 0 (x=0, l_i)$  とすれば,

(17)式の右辺第2項目の第1変分を行う。

$$4\int_0^{l_i} \delta_i'' \partial_\alpha \left( \frac{l_i - x}{l_i} \right) dx = \int_0^{l_i} 4\delta_i'' \partial_\alpha \left( \frac{l_i - x}{l_i} \right) dx + \int_0^{l_i} \delta_i'' 4\partial_\alpha \left( \frac{l_i - x}{l_i} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \Delta \delta_i' \delta_\alpha \left( \frac{l_i - x}{l_i} \right) \right]_0^{l_i} - \int_0^{l_i} \Delta \delta_i' \delta_\alpha \left( -\frac{1}{l_i} \right) dx \\
&+ \left[ \delta_i' \Delta \delta_\alpha \left( \frac{l_i - x}{l_i} \right) \right]_0^{l_i} - \int_0^{l_i} \delta_i' \Delta \delta_\alpha \left( -\frac{1}{l_i} \right) dx \\
&= \left[ \Delta \delta_i' \delta_\alpha \left( \frac{l_i - x}{l_i} \right) + \Delta \delta_i \frac{\delta_\alpha}{l_i} \right]_0^{l_i} + \left[ \delta_i' \Delta \delta_\alpha \left( \frac{l_i - x}{l_i} \right) + \delta_i \frac{\Delta \delta_\alpha}{l_i} \right]_0^{l_i} \\
&= -\Delta \delta_i' \delta_\alpha - \delta_i' \Delta \delta_\alpha \dots \dots \dots \quad (19)
\end{aligned}$$

ここで  $\delta'_{10}$  は  $\delta_1$  の  $x=0$  における 1 回微分であり、最後の計算式の誘導にあたっては 18 式と同様に  $\delta_i, \Delta\delta_i = 0$  ( $x=0, l_i$ ) の関係を使っている。

(17)式の右辺第3項目の第1変分を行う。

$$\begin{aligned} & \Delta \int_0^{l_i} \delta_i'' \frac{\delta\beta}{l_i} x dx = \int_0^{l_i} \Delta \delta_i'' \frac{\delta\beta}{l_i} x dx + \int_0^{l_i} \delta_i'' \frac{\Delta \delta\beta}{l_i} x dx \\ &= \left[ \Delta \delta_i' \frac{\delta\beta}{l_i} x \right]_0^{l_i} - \int_0^{l_i} \Delta \delta_i' \frac{\delta\beta}{l_i} dx + \left[ \delta_i' \frac{\Delta \delta\beta}{l_i} x \right]_0^{l_i} \\ &\quad - \int_0^{l_i} \delta_i' \frac{\Delta \delta\beta}{l_i} dx \end{aligned}$$

$$= \left[ \Delta \delta_i' \frac{\partial \beta}{l} x - \Delta \delta_i \frac{\partial \beta}{l_i} \right]_0^{l_i} + \left[ \delta_i' \frac{\Delta \delta \beta}{l_i} x - \delta_i \frac{\Delta \delta \beta}{l_i} \right]_0^{l_i}$$

$$= \Delta\delta'_{il} \delta_\beta + \delta'_{il} \Delta\delta_\beta \quad \dots \dots \dots \quad (20)$$

$$4\left(-\frac{1}{2}H_d \int_0^{t^*} \eta_i'' \cdot \eta_i \, dx\right) = -\frac{1}{2}H_d \left( 2 \int_0^{t^*} \delta_i'' \cdot A\delta_i \, dx - A\delta_{i0}' \cdot \delta_{i0} - \delta_{i0}' \cdot A\delta_{i0} + A\delta_{i0}' \cdot \delta_{i0} + \delta_{i0}'' \cdot A\delta_{i0} \right) \dots \dots \dots \quad (21)$$

鋼橋III(平井敦著)の(8・13)式によれ

（b）任意点の水平変位を  $\delta$  と置く

鋼橋Ⅲ（平井敦著）の（8・13）式によれば、ケーブル任意点の水平変位を $\xi$ 、傾斜角を $\varphi$ （活荷重載荷前）とすれば

$$d\xi = H_P \frac{\sec^3 \varphi}{E_C A_C} dx - y'' \eta' dx$$

ここに  $H_P$  : 活荷重によるケーブル付加水平張力  
 $E_c A_c$  : ケーブルの伸び剛性

ケーブル定着点  $C$ ,  $C'$  は不動と考えれば

$$\int c' d\xi = 0$$

(22)式の  $l_i$  区間の積分を行う。

$$\begin{aligned}
& \int_0^{l_i} y'_i \eta'_i dx = \int_0^{l_i} y'_i \left( \delta'_i + \frac{\delta_\beta - \delta_\alpha}{l_i} \right) dx \\
&= \int_0^{l_i} y'_i \delta'_i dx + \int_0^{l_i} y'_i \frac{\delta_\beta - \delta_\alpha}{l_i} dx \\
&= \left[ y'_i \delta_i \right]_0^{l_i} - \int_0^{l_i} y''_i \delta_i dx + (\gamma_\beta - \gamma_\alpha) \frac{\delta_\beta - \delta_\alpha}{l_i} \\
&= - \int_0^{l_i} y''_i \delta_i dx + (\gamma_\beta - \gamma_\alpha) \frac{\delta_\beta - \delta_\alpha}{l_i} \dots \quad (23)
\end{aligned}$$

(23)式を(22)式に代入すると $H_P$ が与えられる。

$$H_P = \frac{E_C A_C}{L_E} \sum_{i=1}^3 \left\{ - \int_0^{l_i} y_i'' \delta_i dx + (y_\beta - y_\alpha) \frac{\delta_\beta - \delta_\alpha}{l_i} \right\} \dots \dots \dots \quad (24)$$

一方、 $\sum_{i=1}^3 \int_0^{t_i} y''_i \eta_i dx$  は次のように導かれる。

$$\begin{aligned}
\int_0^{l_i} y_i'' \eta_i dx &= \int_0^{l_i} y_i'' \left( \delta_i + \delta_\alpha + \frac{\delta_\beta - \delta_\alpha}{l_i} x \right) dx \\
&= \int_0^{l_i} y_i'' \delta_i dx + \int_0^{l_i} y_i'' \left( \delta_\alpha + \frac{\delta_\beta - \delta_\alpha}{l_i} x \right) dx \\
&= \int_0^{l_i} y_i'' \delta_i dx + \left[ y_i' \left( \delta_\alpha + \frac{\delta_\beta - \delta_\alpha}{l_i} x \right) \right]_0^{l_i} - \int_0^{l_i} y_i' \frac{\delta_\beta - \delta_\alpha}{l_i} dx \\
&= \int_0^{l_i} y_i'' \delta_i dx + (y_{i,l}' \delta_\beta - y_{i,0}' \delta_\alpha) - (y_\beta - y_\alpha) \frac{\delta_\beta - \delta_\alpha}{l_i} \quad \dots \quad (25)
\end{aligned}$$

(25)式の内の  $(y'_{il} \delta_\beta - y'_{io} \delta_\alpha)$  において近似的に  $y'_{i,l} = y'_{i+1,0}$  が成り立つとすると各径間を集計すると零となる。

$$\sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} y_i'' \eta_i \, dx = \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_0^{l_i} y_i'' \delta_i \, dx - (y_\beta - y_\alpha) \frac{\delta_\beta - \delta_\alpha}{l_i} \right\} \quad \dots \quad (26)$$

(24)式と(26)式より

$$-\frac{1}{2} H_P \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} y_i'' \eta_i dx = \frac{1}{2} \frac{E_c A_c}{L_E} \left[ \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_0^{l_i} y_i'' \delta_i dx - (y_{\beta} - y_{\alpha}) \frac{\delta_{\beta} - \delta_{\alpha}}{l_i} \right\} \right]^2 \dots\dots (27)$$

(27)式の第1変分を行う。

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A} \left( -\frac{1}{2} H_P \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} y_i'' \eta_i \, dx \right) \\
& = \frac{E c A c}{L_E} \left[ \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_0^{l_i} y_i'' \delta_i \, dx - (y_\beta - y_\alpha) \frac{\delta_\beta - \delta_\alpha}{l_i} \right\} \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_0^{l_i} y_i'' \Delta \delta_i \, dx - (y_\beta - y_\alpha) \frac{\Delta \delta_\beta - \Delta \delta_\alpha}{l_i} \right\} \right] \\
& = -H_P \left[ \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_0^{l_i} y_i'' \Delta \delta_i \, dx - (y_\beta - y_\alpha) \frac{\Delta \delta_\beta - \Delta \delta_\alpha}{l_i} \right\} \right] \quad \dots \dots \dots \quad (28)
\end{aligned}$$

### 2 - 2 - 3 $V_{C2}$ (13式) の変分

$$\begin{aligned}
\eta'_1 &= d(\delta_1 + \frac{\delta_A}{l_1}x) / dx = \delta'_1 + \frac{\delta_A}{l_1} \\
\eta'_2 &= d(\delta_2 + \delta_A + \frac{\delta_B - \delta_A}{l_2}x) / dx = \delta'_2 + \frac{\delta_B - \delta_A}{l_2} \\
\eta'_3 &= d(\delta_3 + \delta_B - \frac{l_3 - x}{l_3}) / dx = \delta'_3 - \frac{\delta_B}{l_2} \\
V_{C2} &= \frac{1}{2} H_d \left\{ (-\eta'_{20} + \eta'_{1l}) \delta_A + (-\eta'_{30} + \eta'_{2l}) \delta_B \right\} \\
&= \frac{1}{2} H_d \left\{ \left( -\delta'_{20} - \frac{\delta_B - \delta_A}{l_2} + \delta'_{1l} + \frac{\delta_A}{l_1} \right) \delta_A + \left( -\delta'_{30} + \frac{\delta_B}{l_2} + \delta'_{2l} + \frac{\delta_B - \delta_A}{l_2} \right) \delta_B \right\} \\
&= \frac{1}{2} H_d \left[ \left\{ -\delta'_{20} + \delta'_{1l} - \frac{\delta_B}{l_2} + \delta_A \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \right\} \delta_A + \left\{ -\delta'_{30} + \delta'_{2l} - \frac{\delta_A}{l_2} + \delta_B \left( \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) \right\} \delta_B \right] \quad \dots\dots\dots [13]
\end{aligned}$$

(13)' 式を変分する。

$$\Delta V_{C2} = \frac{1}{2} H_d \left\{ \begin{array}{l} -\Delta \delta'_{20} \delta_A - \delta'_{20} \Delta \delta_A + \Delta \delta'_{11} \delta_A + \delta'_{11} \Delta \delta_A \\ -\Delta \delta_B \frac{\delta_A}{l_2} - \delta_B \frac{\Delta \delta_A}{l_2} + 2 \Delta \delta_A \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \delta_A \\ -\Delta \delta'_{30} \delta_B - \delta'_{30} \Delta \delta_B + \Delta \delta'_{21} \delta_B + \delta'_{21} \Delta \delta_B \\ -\frac{\Delta \delta_A \delta_B}{l_2} - \frac{\delta_A \Delta \delta_B}{l_2} + 2 \Delta \delta_B \left( \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) \delta_B \end{array} \right\} \dots \quad (29)$$

### 2-2-4 桁のポテンシャルエネルギーの変分

(14)式の任意径間について変分する。

$$\begin{aligned} \Delta V_g &= \frac{1}{2} EI_i \int_0^{l_i} 2 \delta''_i \Delta \delta''_i \, dx \\ &= EI_i \left\{ \left[ \delta''_i \Delta \delta'_i \right]_0^{l_i} - \int_0^{l_i} \delta'''_i \Delta \delta'_i \, dx \right\} \\ &= EI_i \left\{ \left[ \delta''_i \Delta \delta'_i \right]_0^{l_i} - \left[ \delta'''_i \Delta \delta_i \right]_0^{l_i} + \int_0^{l_i} \delta_i^{\text{IV}} \Delta \delta_i \, dx \right\} \end{aligned}$$

$x = 0$ ,  $l_i$ において  $\delta_i'' = \Delta\delta_i = 0$  であるから

### 2-2-5 外荷重のポテンシャルエネルギーの変分

(15)式について変分する。

$$\begin{aligned}
\Delta W = & \int_0^{l_1} P_1 \left( \Delta \delta_1 + \frac{\Delta \delta_A}{l_1} x \right) dx + \int_0^{l_2} P_2 \left\{ \Delta \delta_2 + \Delta \delta_A \left( \frac{l_2 - x}{l_2} \right) + \Delta \delta_B \frac{x}{l_2} \right\} dx \\
& + \int_0^{l_3} P_3 \left( \Delta \delta_3 + \Delta \delta_B \frac{l_3 - x}{l_3} \right) dx \\
= & \int_0^{l_1} P_1 \Delta \delta_1 dx + \int_0^{l_2} P_2 \Delta \delta_2 dx + \int_0^{l_3} P_3 \Delta \delta_3 dx \\
& + \left\{ \int_0^{l_1} P_1 \frac{x}{l_1} dx + \int_0^{l_2} P_2 \left( \frac{l_2 - x}{l_2} \right) dx \right\} \Delta \delta_A + \left( \int_0^{l_2} P_2 \frac{x}{l_2} dx + \int_0^{l_3} P_3 \frac{l_3 - x}{l_3} dx \right) \Delta \delta_B \\
= & \int_0^{l_1} P_1 \Delta \delta_1 dx + \int_0^{l_2} P_2 \Delta \delta_2 dx + \int_0^{l_3} P_3 \Delta \delta_3 dx + (R_{1R} + R_{2L}) \Delta \delta_A + (R_{2R} + R_{3L}) \Delta \delta_B
\end{aligned} \quad \dots \quad [31]$$

(31)式において  $R_{iR}, R_{iL}$  は  $i$  節間を単純梁とした時の右側或いは左側の活荷重反力である。

## 2 - 3 釣り合い式

ポテンシャルエネルギーの内、部材に関するものを $U$ 、外荷重に関するものを $W$ とすると体系全体のポテンシャルエネルギー $\Pi$ の変分  $d\Pi = dU - dW = 0$  の条件より釣り合い式を求める。

### 2-3-1 既設桁部での釣り合い式

(21), (28), (30), (31)式より,  $i$  径間について  $4\pi=0$  をあてはめると次式が成り立つ。

$$-H_d \int_0^{l_i} \delta_i'' \Delta \delta_i \, dx - H_P \int_0^{l_i} y_i'' \Delta \delta_i \, dx + EI_i \int_0^{l_i} \delta_i^{\text{IV}} \Delta \delta_i \, dx - \int_0^{l_i} P_i \Delta \delta_i \, dx = 0$$

$$\int_0^{l_i} (-H_d \delta_i'' - H_P y_i'' + EI_i \delta_i^{\text{IV}} - P_i) \Delta \delta_i \, dx = 0$$

$\Delta\delta_i$  は任意であるから

$$-H_d \delta_i'' - H_p y_i'' + E I_i \delta_i^W - P_i = 0 \quad \dots \dots \dots [32]$$

(32)式が  $i$  径間での釣り合い方程式であり、 $H_W \gg H_P$  の時の線形化挠度理論に一致する。

### 2-3-2 架設先端部での釣り合い式

(21), (28), (29), (31)式より次式が成り立つ。

$$+\frac{1}{2}H_d(-\Delta\delta'_{1l}\delta_A-\delta'_{1l}\Delta\delta_A+\Delta\delta'_{20}\delta_A+\delta'_{20}\Delta\delta_A-\Delta\delta'_{2l}\delta_B-\delta'_{2l}\Delta\delta_B+\Delta\delta'_{30}\delta_B+\delta'_{30}\Delta\delta_B)$$

$$+H_P\left\{y_A\frac{\Delta\delta_A}{l_1}+(y_B-y_A)\frac{\Delta\delta_B-\Delta\delta_A}{l_2}-y_B\frac{\Delta\delta_B}{l_3}\right\}$$

$$+ \frac{1}{2} H_d \left\{ \begin{array}{l} - A\delta'_{20} \delta_A - \delta'_{20} A\delta_A + A\delta'_{1l} \delta_A + \delta'_{1l} A\delta_A \\ - A\delta_B \frac{\delta_A}{l_2} - \delta_B \frac{A\delta_A}{l_2} + 2 A\delta_A \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \delta_A \\ - A\delta'_{30} \delta_B - \delta'_{30} A\delta_B + A\delta'_{2l} \delta_B + \delta'_{2l} A\delta_B \\ - \frac{A\delta_A \delta_B}{l_2} - \frac{\delta_A A\delta_B}{l_2} + 2 A\delta_B \left( \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) \delta_B \end{array} \right\} \\ + (R_{1R} + R_{2L}) A\delta_A + (R_{2R} + R_{3L}) A\delta_B = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (33)$$

(33)式を  $\Delta\delta_A$  及び  $\Delta\delta_B$  について整理し、 $\Delta\delta_A$ ,  $\Delta\delta_B$  が任意であるとの条件から次の二式が成り立つ。

$$H_d \left\{ -\frac{\delta_B}{l_2} + \delta_A \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \right\} + H_P \left( \frac{y_A}{l_1} - \frac{y_B - y_A}{l_2} \right) - R_{1R} - R_{2L} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (34)$$

$$H_d \left\{ -\frac{\delta_A}{l_2} + \delta_B \left( \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) \right\} + H_P \left( \frac{\gamma_B - \gamma_A}{l_2} - \frac{\gamma_B}{l_3} \right) - R_{2R} - R_{3L} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (35)$$

(34), (35)式が成り立つことを証明する。

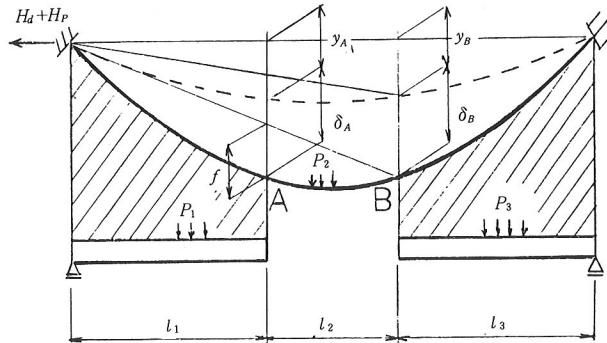


図-5

図-5において  $(l_1 + l_2)$ を単純梁とするA点のモーメントを  $M_A$  とすれば

$$\mathfrak{M}_A = M_d + M_{l1} + M_{l2} \dots \dots \dots \quad (36)$$

ここに  $M_d$  ; 死荷重によるもの

$M_{t1,2}$  ; 径間 1, 2 の活荷重によるもの

$$H_d + H_P = \frac{\mathfrak{M}_A}{f} \quad \dots \dots \dots \quad (37)$$

(36), (38)式を(37)式に代入する。

$$H_d \left( y_A - y_B \frac{l_1}{l_1 + l_2} \right) + H_d \left( \delta_A - \delta_B \frac{l_1}{l_1 + l_2} \right) + H_P \left( y_A - y_B \frac{l_1}{l_1 + l_2} \right) + H_P \left( \delta_A - \delta_B \frac{l_1}{l_1 + l_2} \right)$$

$$= M_d + M_{t1} + M_{t2} \quad \dots \dots \dots \quad (40)$$

(40)式において  $H_d\left(y_A - y_B - \frac{l_1}{l_1 + l_2}\right) = M_d$  であり、 $H_P\left(\delta_A - \delta_B - \frac{l_1}{l_1 + l_2}\right)$  を無視し、両辺を  $\left(\frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2}\right)$  倍する。

$$H_d \left( \delta_A \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} - \frac{\delta_B}{l_2} \right) + H_P \left( y_A \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} - \frac{y_B}{l_2} \right) = \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} (M_{l1} + M_{l2}) \quad \dots \dots \dots (41)$$

(41)式の左辺は(34)式の左辺に等しい。また、(41)式の右辺と(34)式の( $R_{1R} + R_{2L}$ )の等しいことは図-6よりわかる。

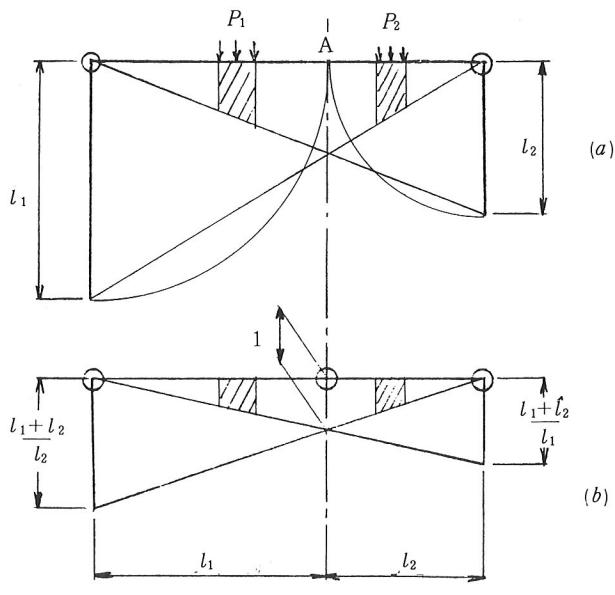


図-6

図-6(a)は( $l_1+l_2$ )を単純梁とした時のA点の曲げモーメント影響線であり、図-6(b)は $l_1$ 及び $l_2$ の単純梁のA点での支点反力影響線である。(a)図の曲げモーメント影響線図の縦距を $(l_1+l_2)/l_1 l_2$ 倍すれば(b)図の支点反力影響線に一致することがわかる。B点についてもA点と同様なことを行えば(35)式が満足する釣り合い式であることがわかる。

### 3. 吊橋架設時の動的な問題

吊橋の耐風安定性に関する振動性状として鉛直振動と振り振動があるが、ここでは離散系モデルで立体解析が必要とされる振り振動について述べる。2において静的な問題の場合、各部のポテンシャルエネルギーの変分により求められた釣り合い式が満足なものであることを確められたが、動的な問題においても同様にして釣り合い式を求めれば静的な場合の荷重項が慣性力に置き換えられた釣り合い式が得られるのは明らかである。ここでは各部のポテンシャルエネルギーを規準振動形で表示し、Rayleigh-Ritz法にて固有値を求めるものとする。

### 3-1 逆対称振り振動

#### 3-1-1 振動モードの仮定

振動モードを図-7のように仮定する。

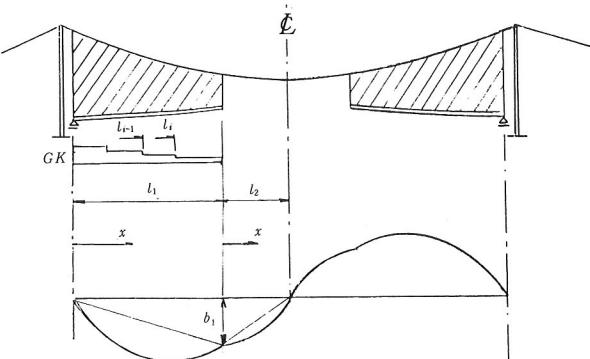


図-7

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq l_1 : \varphi_1 &= a_1 \sin \frac{\pi}{l_1} x + \frac{b_1}{l_1} x \\ 0 \leq x \leq l_2 : \varphi_2 &= a_2 \sin \frac{\pi}{l_2} x - \frac{b_1}{l_2} x + b_1 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

ここで  $\varphi$  ; 振り角

#### 3-1-2 桁のポテンシャルエネルギーの最大値

振り剛度 $GK$ が振動数に対し、通常、支配的であるのでその変断面を考慮する。

$$V_g = 2 \times \frac{1}{2} E C_w \int_0^{l_1} (\varphi_1'')^2 dx + 2 \times \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n G K_i \int_{l_{i-1}}^{l_i} (\varphi_1')^2 dx \quad (43)$$

ここで  $E C_w$  ; 曲げ振り剛性

$G K_i$  ;  $i$  区間目の振り剛性

(42)式を微分し(43)式に代入する。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1' &= a_1 \frac{\pi}{l_1} \cos \frac{\pi}{l_1} x + \frac{b_1}{l_1} \\ \varphi_1'' &= -a_1 \left( \frac{\pi}{l_1} \right)^2 \sin \frac{\pi}{l_1} x \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} E C_w \int_0^{l_1} (\varphi_1'')^2 dx &= E C_w a_1^2 \left( \frac{\pi}{l_1} \right)^4 \int_0^{l_1} \sin^2 \frac{\pi}{l_1} x dx \\ &= E C_w \frac{\pi^4}{2 l_1^3} a_1^2 \end{aligned} \quad (45)$$

(45)式の誘導を含め、三角関数の積分は本文の付録の公式を使用した。(43)式の第2項目に(44)式を代入する。

$$GK_i \int_{l_{i-1}}^{l_i} (\varphi_1')^2 dx \\ = GK_i \cdot \left[ a_1^2 \left( \frac{\pi}{l_1} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} (l_i - l_{i-1}) + \frac{l_1}{4\pi} \left( \sin \frac{2\pi}{l_1} l_i - \sin \frac{2\pi}{l_1} l_{i-1} \right) \right\} \right. \\ \left. + 2a_1 \frac{b_1}{l_1} \left( \sin \frac{\pi}{l_1} l_i - \sin \frac{\pi}{l_1} l_{i-1} \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{b_1}{l_1} \right)^2 (l_i - l_{i-1}) \right] \quad \dots \quad (46)$$

### 3-1-3 ケーブルのポテンシャルエネルギーの最大値

### 1) 一般部

逆対称振動であるので(8)式の $H_P = 0$ とする。

$$V_{C1} = 2 \times \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \int_0^L (-H_d \eta''_i) \eta_i dx \quad \dots \dots \dots \quad (47)$$

$\eta = \frac{b}{2} \varphi$  (但し  $b$  ; ケーブル間隔) の関係を考慮し, (42), (44)式を代入すれば

$$V_{C-1} = \frac{H_d b^2}{4} \left\{ \frac{\pi^2}{l_1} \left( \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_1 b_1}{\pi} \right) + \frac{\pi^2}{l_2} \left( \frac{a_2^2}{2} + \frac{b_1 a_2}{\pi} \right) \right\} \quad \dots \dots \dots (48)$$

なお、 $H_d$  はケーブル 2 本当たりである。

## 2) 架設先端部

(13)式と(42), (44)式より

$$V_{C2} = 2 \times \frac{1}{2} H_d \frac{b^2}{4} (-\varphi'_{20} + \varphi'_{1l}) b_1 \\ = H_d \frac{b^2}{4} \left( -a_1 \frac{\pi}{l_1} + \frac{b_1}{l_1} - a_2 \frac{\pi}{l_2} + \frac{b_1}{l_2} \right) b_1 \quad .....(49)$$

### 3-1-4 運動エネルギーの最大値

$$T = 2 \times \frac{\omega^2}{2g} \left\{ \left( r_1^2 w_{f1} + \frac{b^2}{4} w_{e1} \right) \int_0^{t_1} \varphi_1^2 dx + \frac{b^2}{4} w_{e2} \int_0^{t_2} \varphi_2^2 dx + P_C b_1^2 \right\} \quad \dots \dots \dots (50)$$

ここに  $\omega$ ; 固有円振動数

$r^2 w_f$ ;  $r$  は回転半径,  $w_f$  は桁部単位長さ当たりの重量

$w_c$  ; ケーブル部単位長さ当たりの重量 ( $/_{\beta r}$ )

$P_c$  ; 架設先端部の極慣性モーメント

(50)式に(42)式を代入すれば

$$T = \omega^2 \left\{ \frac{r_1^2 w_{f1} + \frac{b^2}{4} w_{c1}}{g} \left( \frac{l_1}{2} a_1^2 + \frac{2l_1}{\pi} a_1 b_1 + \frac{l_1}{3} b_1^2 \right) + \frac{b^2 w_{c2}}{4g} \left( \frac{l_2}{2} a_2^2 + \frac{2l_2}{\pi} a_2^2 b_1 + \frac{l_2}{3} b_1^2 \right) + \frac{P_c}{g} b_1^2 \right\} \quad \dots \dots \dots (51)$$

### 3 - 1 - 5 振動方程式

(43)～(51)式により、 $T - V$ を求め、 $T - V$ を最小にする条件より  $a_1, a_2, b_1$  で偏微分し、各々零と置くことにより次の振動方程式が得られる。基本式を  $(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{B}) \mathbf{X} = \mathbf{0}$  とすれば  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{X}$  は各々次のようになる。

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{EC w \pi^4}{l_1^3} + \frac{H_d b^2 \pi^2}{4 l_1} + a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & \frac{H_d b^2}{4} \frac{\pi^2}{l_2} & 0 \\ a_{31} & 0 & \frac{H_d b^2}{4} 2\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) + a_{33} \end{vmatrix}$$

(52)

$$a_{11} = 2\left(\frac{\pi}{l_1}\right)^2 \sum_{i=1}^n GK_i \left\{ \frac{1}{2}(l_i - l_{i-1}) + \frac{l_1}{4\pi} \left( \sin \frac{2\pi}{l_1} l_i - \sin \frac{2\pi}{l_1} l_{i-1} \right) \right\}$$

$$a_{13} = a_{31} = 2 \frac{\pi}{l_1^2} \sum_{i=1}^n GK_i \left( \sin \frac{\pi}{l_1} l_i - \sin \frac{\pi}{l_1} l_{i-1} \right)$$

$$a_{33} = \frac{2}{l_1^2} \sum_{i=1}^n GK_i (l_i - l_{i-1})$$

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \frac{W l_1}{g} & 0 & \frac{2 W l_1}{\pi g} \\ 0 & \frac{\alpha W l_2}{g} & \frac{2 \alpha W l_2}{\pi g} \\ \frac{2 W l_1}{\pi g} & \frac{2 \alpha W l_2}{\pi g} & \frac{2}{3g} W (l_1 + \alpha l_2) + \frac{2 P_c}{g} \end{vmatrix}$$

$$W; r_1^2 w_{f1} + \frac{b^2}{4} w_{c1}$$

$$\alpha; \frac{b^2 w_{c2}}{4} / W$$

$$\mathbf{X} = [a_1, a_2, b_1]^T \quad \dots \dots \dots (52)$$

### 3-2 対称振動

#### 3-2-1 振動モードの仮定

振動モードを図-8のように仮定する。

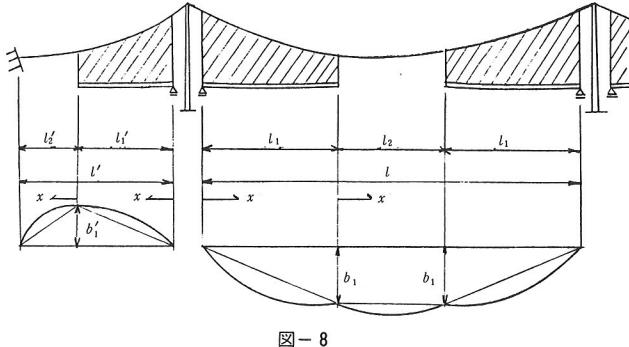


図-8

中央径間に対しては

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq l_1 ; \varphi_1 &= a_1 \sin \frac{\pi}{l_1} x + \frac{b_1}{l_1} x \\ 0 \leq x \leq l_2 ; \varphi_2 &= a_2 \sin \frac{\pi}{l_2} x + b_1 \end{aligned} \right\} \dots(53)$$

側径間に対しては

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq l'_1 ; \theta_1 &= a'_1 \sin \frac{\pi}{l'_1} x + \frac{b'_1}{l'_1} x \\ 0 \leq x \leq l'_2 ; \theta_2 &= a'_2 \sin \frac{\pi}{l'_2} x - \frac{b'_1}{l'_2} x + b'_1 \end{aligned} \right\} \dots(54)$$

#### 3-2-2 桁のポテンシャルエネルギーの最大値

(43)式と同様にして次式で与えられる。

$$\begin{aligned} V_g = & 2 \times \frac{1}{2} E C_w \int_0^{l_1} (\varphi''_1)^2 dx + 2 \times \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n G K_i \int_{l_{i-1}}^{l_i} (\varphi'_1)^2 dx \\ & + 2 \times \frac{1}{2} E C'_w \int_0^{l'_1} (\theta''_1)^2 dx + 2 \times \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n G K'_i \int_{l'_{i-1}}^{l'_i} (\theta'_1)^2 dx \end{aligned} \dots(55)$$

(55)式に(53), (54)式を代入する。

$$V_g = E C_w \frac{\pi^4}{2 l_1^3} a_1^2 + E C'_w \frac{\pi^4}{2 l'_1^3} a'_1^2 + g_c + g_s \dots(56)$$

但し,  $g_c$  と  $g_s$  は(46)式で与えられるものである。

#### 3-2-3 ケーブル一般部のポテンシャルエネルギーの最大値

1) 死荷重ケーブル水平張力  $H_d$  によるもの

(48)式と同様にして吊橋全径間に渡って積分すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} V_{C1} = & \frac{H_d b^2}{4} \left\{ \frac{\pi^2}{l_1} \left( \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_1 b_1}{\pi} \right) + \frac{\pi^2}{2 l_2} \left( \frac{a_2^2}{2} + \frac{2 a_2 b_1}{\pi} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\pi^2}{l'_1} \left( \frac{a'_1^2}{2} + \frac{a'_1 b'_1}{\pi} \right) + \frac{\pi^2}{l'_2} \left( \frac{a'_2^2}{2} + \frac{a'_2 b'_1}{\pi} \right) \right\} \dots\dots\dots(57) \end{aligned}$$

2) ケーブル付加水平張力  $H_P$  によるもの

$$(8) \text{式の第2項} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} (-H_P y_i'') \eta_i dx \right) \text{の計算}$$

を行う。なお  $H_P$  の大きさについては主塔のバネ剛度を考慮するので側径間と中央径間で区別する。

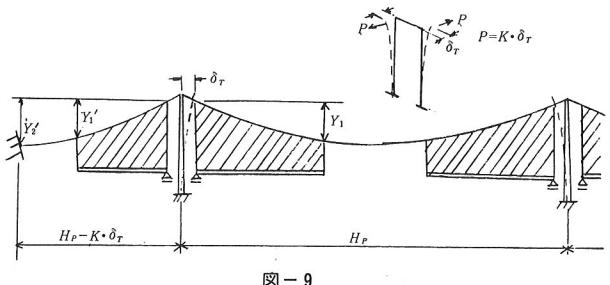


図-9において塔の倒れ量を  $\delta_T$  とする

$$\delta_T = -(H_P L_{EC} / E c A_c - SUC) / 2 \dots\dots\dots(58)$$

但し,  $SUC$  は(24)式の { } 内の中央径間にに関する合計値であつてたわみに関する値であるから(53)式に  $b$  (ケーブル巾)/2 を乗じる。また,  $H_P$ ,  $A_c$  共, 片ケーブル当たりとする。一方, ケーブル方程式より次式が得られる。

$$2(H_P - K \cdot \delta_T) \frac{L_{ES}}{E c A_c} - 2SUS + H_P \frac{L_{ES}}{E c A_c} - SUC = 0 \dots\dots\dots(59)$$

但し,  $K$  は図-9で示されるように主塔を振った時の片塔柱当たりのバネ剛度である。また,  $SUS$  は  $SUC$  と同様にして側径間(片側)について求めたものである。

(59)式の  $\delta_T$  に(58)式を代入すると  $H_P$  に関して次式を得る。

但し、

$$C_1 = 2 \left/ \left\{ \frac{2L_{ES} + L_{EC}}{E_c A_c} + \frac{K \cdot L_{EC} L_{ES}}{(E_c A_c)^2} \right\} \right.$$

$$C_2 = \left( 1 + \frac{K \cdot L_{ES}}{E_c A_c} \right) \left/ \left\{ \frac{2L_{ES} + L_{EC}}{E_c A_c} + \frac{K \cdot L_{EC} L_{ES}}{(E_c A_c)^2} \right\} \right.$$

$H_p$ に関する全橋のポテンシャルエネルギーは次式で与えられる。(24), (27)式を参考にすると

$$V_{C2} = \left\{ \frac{1}{2} (H_P - K \cdot \delta_T) 2SUS + \frac{1}{2} H_P SUC \right\} \times 2 \dots \dots \dots (61)$$

(61)式の  $H_P$ ,  $\delta_T$  に各々 (60) 式及び (58) 式を代入すると

$$V_{C2} = C_1 \left( 2 + \frac{K \cdot L_{EC}}{E_C \cdot A_C} \right) S \cdot U \cdot S^2 + \left\{ C_1 + C_2 \left( 2 + \frac{K \cdot L_{EC}}{E_C \cdot A_C} \right) - K \right\} S \cdot U \cdot S \cdot U \cdot C + C_2 \cdot S \cdot U \cdot C^2$$

更に簡単に次式で置き換える。

$$V_{C2} = A_1 \cdot SUS^2 + A_2 \cdot SUS \cdot SUC + A_3 \cdot SUC^2 \quad \dots \dots \dots \quad (62)$$

### 3-2-4 架設先端部のケーブルポテンシャルエネルギー

(13)式を参考にすれば中央径間、側径間について次式を得る。

$$V_{C3} = 2 \times \left\{ \frac{1}{2} H_d \left( \frac{b}{2} \right)^2 (-\varphi'_{20} + \varphi'_{1l}) b_1 + \frac{1}{2} H_d \left( \frac{b}{2} \right)^2 (-\theta'_{20} + \theta'_{1l}) b'_1 \right\} \quad \dots \dots \dots (63)$$

(63)式に(53), (54)式を代入すると

$$V_{C3} = H_d \left(\frac{b}{2}\right)^2 \left\{ \left( -a_1 \frac{\pi}{l_1} - a_2 \frac{\pi}{l_2} + \frac{b_1}{l_1} \right) b_1 + \left( -a'_1 \frac{\pi}{l'_1} - a'_2 \frac{\pi}{l'_2} + b'_1 \left( \frac{1}{l'_1} + \frac{1}{l'_2} \right) \right) b'_1 \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (64)$$

### 3-2-5 主塔のポテンシャルエネルギー

主塔のポテンシャルエネルギーは  $K$  が片塔柱当たりであることを考慮すると全橋当たりで次式で表わせる。

$$V_t = 4 \times \left\{ \frac{1}{2} K \bullet \delta_{\tau}^2 \right\} = 2 K \bullet \delta_{\tau}^2 \quad \dots \dots \dots \quad (65)$$

(65)式の  $\delta_T$  に(58)式を代入する。

$$V_t = 2K \frac{1}{4} \left( H_P \frac{L_{EC}}{E_c A_c} - SUC \right)^2$$

$H_P$ に(60)式を代入すると

$$\begin{aligned}
V_t &= \frac{1}{2} K \left\{ (C_1 \bullet SUS + C_2 \bullet SUC) \frac{L_{EC}}{E_C A_C} - SUC \right\}^2 \\
&= \left\{ \frac{K}{2} \left( \frac{L_{EC}}{E_C A_C} \right)^2 C_1^2 \right\} SUS^2 + \left\{ K \left( \frac{L_{EC}}{E_C A_C} \right)^2 C_1 C_2 - K \left( \frac{L_{EC}}{E_C A_C} \right) C_1 \right\} SUS \bullet SUC \\
&\quad + \left\{ \frac{K}{2} \left( \frac{L_{EC}}{E_C A_C} \right)^2 C_2^2 - K \left( \frac{L_{EC}}{E_C A_C} \right) C_2 + \frac{K}{2} \right\} SUC^2 \\
&= A'_1 \bullet SUS^2 + A'_2 \bullet SUS \bullet SUC + A'_3 \bullet SUC^2
\end{aligned} \tag{66}$$

### 3-2-6 運動エネルギーの最大値

(50)式と同様にして次式を得る。

$$T = \frac{\omega}{2g} \left\{ 2(r_1^2 w_{f1} + \frac{b^2}{4} w_{c1}) \int_0^{l_1} \varphi_1^2 dx + \frac{b^2}{4} w_{c2} \int_0^{l_2} \varphi_2^2 dx + 2P_{cb} b^2 \right. \\ \left. + 2(r_1^2 w_{f1}' + \frac{b^2}{4} w_{c1}') \int_0^{l_1} \theta_1^2 dx + 2\frac{b^2}{4} w_{c2}' \int_0^{l_2} \theta_2^2 dx + 2P_s b_1'^2 \right\} \quad \dots \quad (67)$$

ここに  $r_1$ ,  $w_{f1}$ ,  $w_{c1}$  ; 中央径間  $l_1$  区間の回転半径, 柄部, ケーブル部の単位長さ当たりの重量

$r'_1, w'_{f1}, w'_{c1}$ ; 側径間  $l'_1$  区間に対応するもの

$P_c, P_s$  ; 架設先端部の中央、側径間の極慣性モーメント

(67)式の積分式は(53), (54)式を参照して次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{t_1} \varphi_1^2 dx &= \frac{l_1}{2} a_1^2 + \frac{2l_1}{\pi} a_1 b_1 + \frac{l_1}{3} b_1^2 , \quad \int_0^{t_2} \varphi_2^2 dx = \frac{l_2}{2} a_2^2 + \frac{4l_2}{\pi} a_2 b_1 + l_2 b_1^2 \\ \int_0^{t_1} \theta_1^2 dx &= \frac{l_1'}{2} a_1'^2 + \frac{2l_1'}{\pi} a_1' b_1' + \frac{l_1'}{3} b_1'^2 , \quad \int_0^{t_2} \theta_2^2 dx = \frac{l_2'}{2} a_2'^2 + \frac{2l_2'}{\pi} a_2' b_1' + \frac{l_2'}{3} b_1'^2 \end{aligned} \right\} \dots \quad (68)$$

### 3 - 2 - 7 振動數方程式

(56), (57), (52), (64), (66)式より,  $T-V$ を求め,  $a_1, a_2, b_1, a'_1, a'_2, b'_1$ について偏微分することにより, (52)式と同様に振動数方程式を得る。

$A = A_1 + A_2$  とし、さらに  $A_1$  を次のように置く。

$$A^1 = \begin{vmatrix} A^1_{11} & A^1_{12} \\ A^1_{21} & A^1_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & \frac{E C_w \pi^4}{l_1^3} + \frac{H_d b^2 \pi^2}{4 l_1} + a_{11} & 0 & & a_{13} \\
 \hline
 \textbf{A} 1_{11} = & 0 & \frac{H_d b^2 \pi^2}{8 l_2} & 0 & \\
 & \dots & \dots & \dots & \\
 & a_{31} & 0 & \frac{H_d \cdot b^2}{2 l_1} + a_{33} &
 \end{array}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{1}_{12} = \mathbf{A} \mathbf{1}_{21} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}_{122} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \frac{EC_w' \pi^4}{l_1'^3} + \frac{H_d b^2 \pi^2}{4 l_1'} + a_{11}' & 0 & a_{13}' \\ \hline \dots & 0 & \frac{H_d b^2 \pi^2}{4 l_2'} & 0 \\ \hline & a_{31}' & 0 & \frac{H_d b^2}{2} \left( \frac{1}{l_1'} + \frac{1}{l_2'} \right) + a_{33}' \\ \hline \end{array}$$

但し、 $a_{ij}$ ,  $a'_{ij}$  は(52)式で与えられたものと同様である。  
次にケーブル付加水平張力 $H_P$ 及び主塔の変形に伴なうポテンシャルエネルギー (62)式, (66)式を偏微分することにより、 $\mathbf{A}2$ を得る。

$\mathbf{A}2$ を次のように置く。

$$\mathbf{A}2 = \begin{vmatrix} \mathbf{A}2_{11} & \mathbf{A}2_{12} \\ \mathbf{A}2_{21} & \mathbf{A}2_{22} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \left| 2 \times \frac{8f_1}{l_1^2} \frac{l_1}{\pi}, \frac{8f_2}{l_2^2} \frac{l_2}{\pi}, \frac{Y_1}{l_1} \right|^T$$

$$\mathbf{Y}' = \left| 2 \times \frac{8f'_1}{l'_1^2} \frac{l'_1}{\pi}, 2 \times \frac{8f'_2}{l'_2^2} \frac{l'_2}{\pi}, \left( \frac{Y'_1}{l'_1} + \frac{(Y'_1 - Y'_2)}{l'_2} \right) \right|^T$$

とおく。なお、 $8f_i/l_i^2 = w_i/H_d$ として与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}2_{11} &= \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^T \cdot (A_3 + A'_3) 2b^2 \\ \mathbf{A}2_{12} &= \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}'^T \cdot (A_2 + A'_2) b^2/2 \\ \mathbf{A}2_{21} &= \mathbf{Y}' \cdot \mathbf{Y}^T \cdot (A_2 + A'_2) b^2/2 \\ \mathbf{A}2_{22} &= \mathbf{Y}' \cdot \mathbf{Y}'^T \cdot (A_1 + A'_1) b^2/2 \end{aligned}$$

次に運動エネルギーに関する $\mathbf{B}$ マトリクスは、(68)式を(67)式に代入したものを偏微分することにより次式を得る。

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{vmatrix} \text{ とおく}$$

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{vmatrix} \frac{W}{g} l_1 & 0 & \frac{2W}{g} \frac{l_1}{\pi} \\ 0 & \frac{\alpha_1 W}{g} l_2 & \frac{4\alpha_1 W}{g} \frac{l_2}{\pi} \\ \frac{2W}{g} \frac{l_1}{\pi} & \frac{4\alpha_1 W}{g} \frac{l_2}{\pi} & \frac{W}{g} \left( \frac{2l_1}{3} + 2\alpha_1 l_2 \right) + 2 \frac{P_c}{g} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{21} = \mathbf{B}_{12} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{B}_{22} = \begin{vmatrix} \frac{\alpha_2 W}{g} l'_1 & 0 & \frac{2\alpha_2 W}{g} \frac{l'_1}{\pi} \\ 0 & \frac{\alpha_3 W}{g} l'_2 & \frac{2\alpha_3 W}{g} \frac{l'_2}{\pi} \\ \frac{2\alpha_2 W}{g} \frac{l'_1}{\pi} & \frac{2\alpha_3 W}{g} \frac{l'_2}{\pi} & \frac{2W}{3g} (\alpha_2 l'_1 + \alpha_3 l'_2) + \frac{2P_s}{g} \end{vmatrix}$$

(69)

ここに、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は $l_1$ 区間の極慣性モーメント $(r^2 w_f + \frac{b^2}{4} w_c)$ に対する $l_2, l'_1, l'_2$ 区間の比率を示す。

#### 4. 計算例

3.で述べた方法による計算例を表-1に示す。

4 stepの計算に要したCPU timeは16秒である。(使用電子計算機はUNIVAC 1106である。)

## 5. あとがき

吊橋の架設途上の振動計算をハンガーを膜とした Rayleigh-Ritz 法で解析する方法を示したが、離散系モデルとの計算誤差はどの程度か問題になるところであるが、本文で示したモードの仮定（級数 1 項のみ）で 5 % 程度振動数が高めになるようである（機会あれば比較例を示すことにしたい）。本文の方法によれば鉛直振動の場合も容易に計算できるし、架設ヒンジがある場合も可能である。

今後の残る問題点としては連続桁の場合のモードの仮定を如何にするかがある。

## 付録（三角関数の積分公式）

1.  $\int_0^l \sin \frac{\pi}{l} x dx = \frac{2l}{\pi}$
2.  $\int_0^l \cos \frac{\pi}{l} x dx = 0$
3.  $\int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx = \frac{l}{2}$
4.  $\int_0^l \cos^2 \frac{\pi}{l} x dx = \frac{l}{2}$
5.  $\int_0^l \sin \frac{\pi}{l} x \cdot x dx = \frac{l^2}{\pi}$

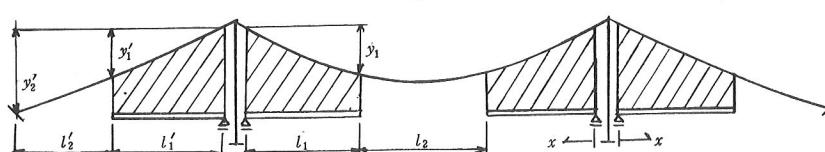


表-1

		Step 1	Step 2	Step 3	Step 4			
径間長	$l_1$ (m)	150.30	230.46	310.62	370.74			
	$l_2$ (m)	460.90	300.60	140.28	20.04			
	$l'_1$ (m)	49.10	127.66	206.22	235.68			
	$l'_2$ (m)	196.66	118.10	39.54	0			
$\frac{8f_i}{l_i^2} = \frac{w_i}{H_d}$ (1/m)	$l_1$ 区間	0.00191	0.00143	0.00112	0.00100			
	$l_2$ "	0.00057	0.00042	0.00033	0.00030			
	$l'_1$ "	0.00207	0.00155	0.00122	0.00108			
	$l'_2$ "	0.00061	0.00045	0.00036	0			
入力	ケーブル間隔 $b$ (m)	26	26	26	26			
	$y_1$ (m)	52	64	72	76			
	ケーブル縦距 $y'_1$ (m)	25	55	80	86			
	$y'_2$ (m)	86	86	86	86			
死荷重ケーブル水平張力 $H_d$ (t/B <sub>r</sub> )		8498	11 364	14 498	16 276			
	ケーブル断面積 $A_g$ (m <sup>2</sup> /B <sub>r</sub> )	0.485	0.485	0.485	0.485			
	ケーブルヤング係数 (t/m <sup>2</sup> )	$2.0 \times 10^7$	$2.0 \times 10^7$	$2.0 \times 10^7$	$2.0 \times 10^7$			
	主塔の振りバネ( $K$ ) (t/m/C)	500	500	500	500			
データ	径間	区間	$x$	$K$	$x$	$K$	$x$	$K$
	$l_1$	第 1	30.06	4.71	30.06	4.71	30.06	4.71
		第 2	70.14	4.32	90.18	4.28	90.18	4.28
		第 3	110.22	4.03	170.34	3.75	170.34	3.75
		第 4	150.30	3.73	230.46	3.49	310.62	3.49
	$l'_1$	第 1	9.82	3.64	29.46	3.62	29.46	3.62
		第 2	19.82	3.60	49.10	3.57	88.28	3.57
		第 3	29.82	3.60	88.38	3.57	166.94	3.57
		第 4	49.10	3.60	127.66	3.57	206.22	3.53
	架設先端部極慣性 (中央) (t m <sup>4</sup> )		40 000		40 000		40 000	
	" " (側) (t m <sup>4</sup> )		40 000		40 000		40 000	
	$l_1$ の桁部極慣性 (t m <sup>4</sup> /m)		1 026		1 053		1 077	
	$l'_1$ の " " ( " )		1 212		1 212		1 154	
	中央径間のケーブル重量 (t/m/B <sub>r</sub> )		4.822		4.822		4.822	
	側径間の " " ( " )		5.158		5.158		5.158	
計算結果	対称振り振動数 ( $H_d$ )		0.205		0.270		0.362	
	逆対称 " " ( " )		0.276		0.386		0.354	