

有限要素法による 橋梁断面まわりの風の流れ解析

Finite Element Analysis for Flow around Bridge Section

野村 国勝*
Kunikatsu NOMURA

前田 研一**
Ken-ichi MAEDA

枝元 勝哉***
Katsuya EDAMOTO

In this paper, we report the applicability of finite element method for solving the flow passed a bridge section. We use the fractional step method in discretization of flow field so as to avoid using the mixed interpolation on the pressure and velocity fields. And we also make use of the ICCG method for the sparse systems of linear equations in the pressure Poisson equation. Some results after computation are presented in various types of basic variables.

Keywords : finite element method, flow analysis, fractional step method, bridge section

1. はじめに

構造物まわりの風の流れを考えることは、その風が構造物に及ぼす力や構造物の周辺に与える影響を知るうえで、きわめて重要なことである。一般に風の流れは、構造物の形状や周辺の地形などにより、その特性を変化させるので、理論解析により一意的な解を求めるのは事実上不可能である。このため従来、構造物の耐風設計に当っては、風洞による模型実験が行われてきた。

一方、近年におけるコンピュータ関連技術の飛躍的な向上に伴い、これまで模型実験に頼ってきた風工学の分野に、積極的に数値シミュレーションを取り入れようとする動きが現れてきた。いわゆる“数値風洞”¹⁾の試みである。現状ではコンピュータのメモリや実行速度上の制約から、風洞実験に代替しうるシステムとしてはまだ多くの問題点を抱えているが、それでも基本的なモデルに関しいくつかの興味深い結果が得られている²⁾。

本文では、流れの場の離散化解析手法として有限要素法を用い、これにより箱型橋梁断面まわりの流れ解析を実施した例を報告する。

2. 流れ場を支配する方程式

橋梁断面まわりの流れを考えて、問題を2次元の非圧

縮粘性流れに限定する。

構造力学において変位や力が未知量として現れるのと同様に、流れを解く場合においても任意の場所・時間における流速および圧力が未知量として取り扱われる。流れの非圧縮性を仮定する場合、これらの未知量は以下の2つの支配方程式を満足する。

(1) 連続の式

連続の式は流体中における質量保存の法則を表すものであり、流れ場がいかなる条件においても満たさなくてはならない絶対条件である。式を無次元化し添字記法と総和規約³⁾に従って記述すると、非圧縮流れでは以下のようなになる。

$$u_{i,i} = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここに u_i ($i = 1, 2$)は直交座標系における X, Y 方向の流速を表す。

(2) 運動方程式

流体に関する運動方程式は、流体中の任意の閉曲線 S で囲まれた面積 V にNewtonの運動法則を適用して求められる。すなわち、

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} + P_{,i} - \frac{1}{R} (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 P は圧力を表し、また R は流れにおける粘性の影響を表す無次元パラメータでレイノルズ数と呼ばれる。

*川田工業(株)取締役技術本部長 **前・川田工業(株)技術本部中央研究室室長 ***川田工業(株)技術本部中央研究室

式(2)はNavier-Stokesの式(以下NS方程式)と呼ばれ、流体の運動をもっとも一般的に規定する方程式である。

以上から分かるように、3つの未知量(圧力 P および X , Y 方向の流速 u_i)に対し、3つの方程式(連続の式および X , Y 方向のNS方程式)が存在するので、あとは適切な近似解法を用いることにより、流れ場を代数的に解くことが可能になる。

3. 境界条件

数値解析により流れを解く場合、無限の広がりを持つ領域を対象とすることは現実的でないので、一般にある有限の領域内に限って解析を行うことになる。この際、解析領域の境界において、次に示す2通りの境界条件のうちいずれか一方を満足する必要がある。

(1) 基本境界条件

これは未知量そのものに既知の値を与える条件であり、構造物まわりの流れを扱う場合には、流入面や壁面における流速の境界条件がこれに相当する。この場合の条件を式で表せば、

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad \dots\dots\dots(3)$$

となる。ただし右辺の記号へは、この値が既知であることを示す。

(2) 自然境界条件

この条件を満たす境界上では、未知量の勾配が与えられる。具体的には、流出面上で与えられる表面力の値などがこれに相当する。同様に式で表せば、

$$\{-P\delta_{ij} + \frac{1}{R}(u_{i,j} + u_{j,i})\} \cdot n_j = \hat{S}_i \quad \text{on } \Gamma_2 \quad \dots\dots\dots(4)$$

となる。

4. 分離型法

流れを支配する基本方程式と境界条件が定めれば、あとはこれらを満足する解を求める方法が問題となるが、本文では流れ場の離散化解析手法として、有限要素法の中でも特に分離型法⁴⁾と呼ばれている方法を採用する。

(1) 支配方程式の離散化

分離型法では、支配方程式に対する時間方向の離散化を以下のように行う。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n u_{j,i}^n + P_{,i}^{n+1} - \frac{1}{R}(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n) = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$u_{i,i}^{n+1} = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここに Δt は時間増分を表し、各式における添字 n は、これらが時間 $n\Delta t$ の量であることを示す。式(5)から分かるように、NS方程式の時間項にはEulerの1次前進差分を用いている。

(2) 圧力に関するPoisson方程式

式(5)は時刻 n における流速 u_i^n と、これより1ステップ

進んだ時刻 $(n+1)$ における圧力 P^{n+1} から、流速 u_i^{n+1} を求めようとするものである。したがって、本式のほかに別途圧力 P^{n+1} を計算する式が必要となる。このため式(5)の両辺の発散をとり、式(6)の条件を加味すると、以下のような圧力に関するPoisson(ポアソン)方程式が得られる。

$$P_{,ii}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} u_{i,i}^n - u_{j,i}^n u_{j,i}^n - u_j^n u_{i,j}^n + \frac{1}{R}(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,ij} \quad \dots\dots\dots(7)$$

すなわち分離型法の計算手順は、式(7)により圧力 P^{n+1} を計算し、次に式(5)により流速 u_i^{n+1} を求めるということになる。

5. 有限要素方程式

前出の式(7), (5)にGalerkin有限要素法を適用し、支配方程式の空間方向の離散化を行うと、以下の有限要素方程式を得る。

$$A_{\alpha\beta i} P_{\beta}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} H_{\alpha\beta i} u_{\beta i}^n - K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j}^n u_{\gamma i}^n - \hat{\Omega}_{\alpha i} \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta} u_{\beta i}^{n+1} = \bar{M}_{\alpha\beta} u_{\beta i}^n - \Delta t \{ K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j}^n u_{\gamma i}^n - H_{\alpha i\beta} P_{\beta}^{n+1} + \frac{1}{R} S_{\alpha i\beta j} u_{\beta j}^n - \hat{\Sigma}_{\alpha i}^{n+1} \} \quad \dots\dots\dots(9)$$

式(8), (9)に与えられた境界条件を考慮してやることにより、流れ場全体の圧力および流速を求めることができる。なお式(8)の圧力に関するポアソン方程式を解く際、流出境界上における基本境界条件が別途必要となるが、本文では志村・川原の提案する近似解法⁵⁾を用いている。

6. 数値解析例

本節では有限要素法による流れ解析の一例として、箱型橋梁断面まわりの流れ解析を実施する。

(1) 対象モデル

図-1に対象とした橋梁モデルの諸元を示す。

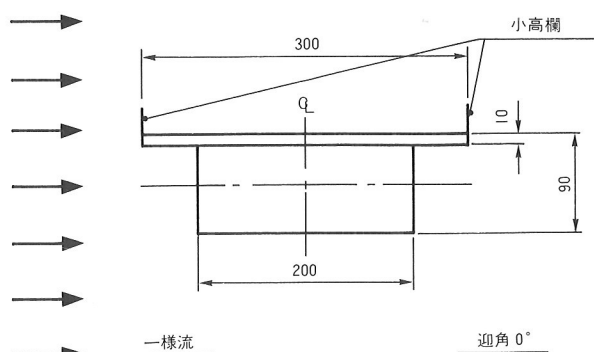


図-1 箱型橋梁断面モデル

本計算で用いたモデルは、過去に風洞実験で用いられたもの⁶⁾を参考にしており、斜張橋などでよく見られる

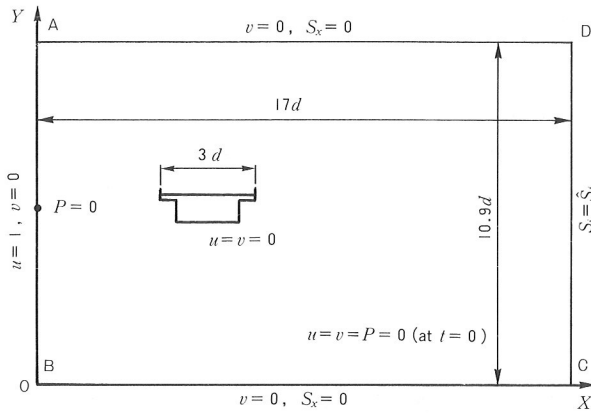


図-2 解析領域

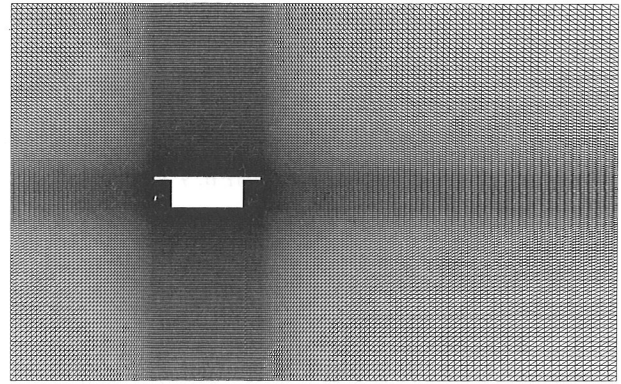


図-3 有限要素分割 (119×171)

断面を模してある。さらに張出し部には小高欄を模した突起を設けてある。

a) 解析領域

図-2に解析の対象とした領域を示す。

解析領域は、桁の幅を $3d$ としたときに、 X 方向の幅が $17d$ 、 Y 方向の高さが $10.9d$ となる矩形領域である。また、風洞実験でいう閉塞率は約8.3%である。

図において、辺A-Bは流入境界であり、 X 方向の一様流速が基本境界条件として与えられる。つぎに辺B-CおよびA-Dでは、 Y 方向の流速が0という基本境界条件と、 X 方向の表面力が0という自然境界条件が与えられる。以上の境界条件は、全時間ステップを通じて不変の条件である。また最後に辺C-Dであるが、この境界上では、ある任意の時間ステップの直前のステップで求められた流速と圧力を用い、現時点での表面力を評価し自然境界条件として与えている。

b) 有限要素分割

図-3に領域を有限要素分割した図を示す。

本解析で用いた要素は三角形1次要素であり、これにより領域を38600個の要素に分割している。またこのときの格点数は19666点である。

c) 数値計算条件

表-1に本解析で用いた数値計算条件を示す。

表-1 数値計算条件

レイノルズ数 R	1000
時間増分 Δt	0.0005
ICCG法における収束誤差 ϵ	0.00001

実際の風洞実験におけるレイノルズ数は、一般に 10^4 以上である。しかしながら本文で用いている解析手法では、このような高レイノルズ数の流れに対してはさらに細かい要素分割を必要とする。したがって計算時間も膨大なものになるため、ここではレイノルズ数を 10^3 に設定した。また時間増分 Δt については、条件の最も厳しい要素

においてCFLの条件⁷⁾を満足させ、さらに後述するICCG法⁸⁾との兼ね合いも考慮して定めた。

本計算では、圧力に関するポアソン方程式を解く際にICCG法 (incomplete Cholesky conjugate gradient method) を用いている。これは大規模疎行列を係数行列として持つ連立1次方程式の反復解法として、最近他の工学分野においても注目を集めている方法であり、直接解法であるスカイライン法などに比べて、大幅なコンピュータメモリの節約が図れる。ただし時間増分をあまり大きく取り過ぎると、1回の繰り返し計算に要する反復回数が増大するため、時間増分に対し適切な配慮が必要となる。

また、NS方程式の時間項にEulerの1次前進差分を用いていることによる、数値的な絶対誤差を軽減するため、実際の計算ではBTD (balancing tensor diffusivity)⁹⁾の項を付加している。

(2) 解析結果

以下に箱桁断面に風が作用し始めてから比較的初期の段階における、周辺流速および圧力の変化を示す。

a) 流速ベクトル

図-4に各時間ステップにおける、断面周辺の瞬間的な流速ベクトルの分布を示す。これらは各格点における流速ベクトルの方向に、適切なスケールで直線を引いたものであり、周辺気流の動向を捉えるのに適している。図から、桁上面および後方において発生した渦が、時間の経過と共に下流側へ移動してゆくさまが確認できる。

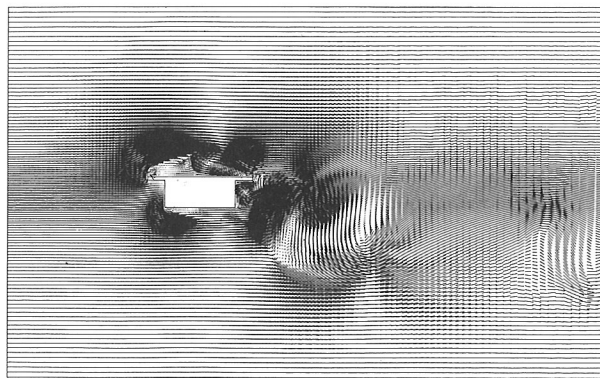
b) 流線 (流れ関数)

図-5は、図-4に対応した流線 (流れ関数) を全体的に表示したものである。

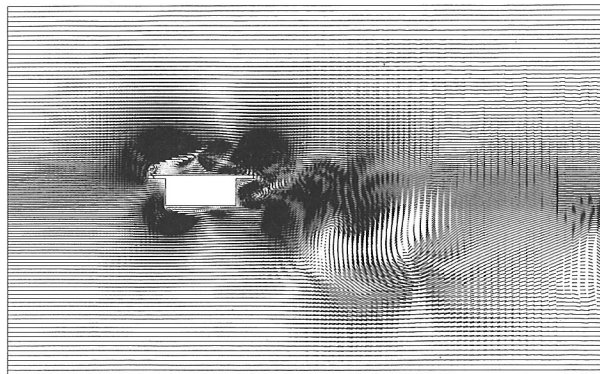
流線とは、その線上の各点における接線の方向が、その点における流速ベクトルの方向に一致するような曲線群のことをいう。

c) 圧力

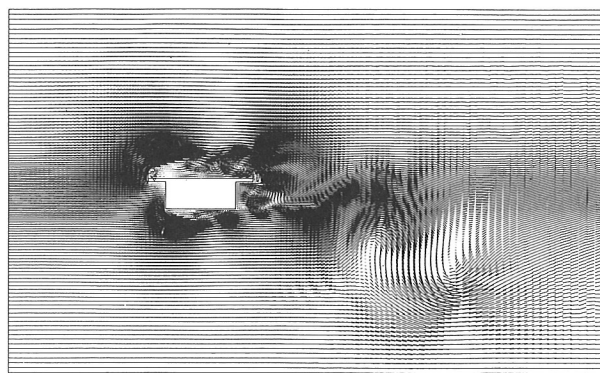
基礎方程式中、圧力 P は勾配の形で与えられるので、式(8)のポアソン方程式を解いて得られる圧力値は、絶対量



a) time=15.0

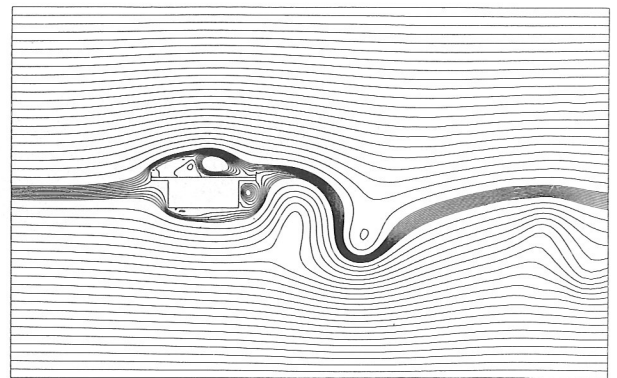


b) time=16.5

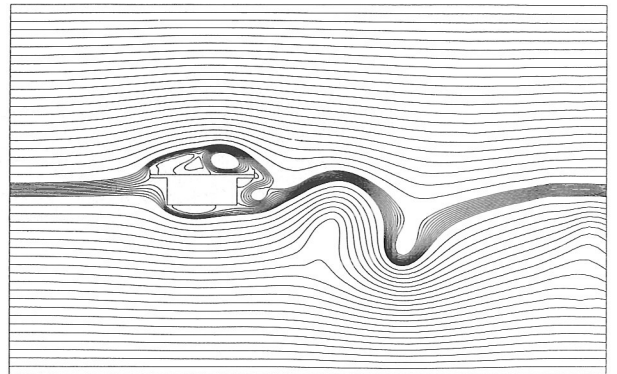


c) time=18.0

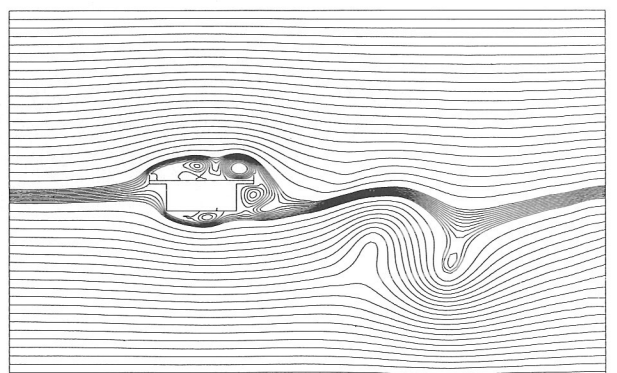
図-4 流速ベクトル分布



a) time=15.0



b) time=16.5



c) time=18.0

図-5 流線 (流れ関数)

としては意味を持たない。したがって結果は、入口中央における圧力を基準値(=0)とした相対量で評価する。図-6は、各瞬間の圧力分布を鳥瞰図の形で表したものであり、図-4、5と対比することにより、圧力が急激に変化する部分においては流体が加速され、流速ベクトルや流線も変化することが分かる。

7. おわりに

以上、箱桁橋梁断面まわりの風の流れ解析に、有限要素法を適用した一例を示した。しかしながら風洞実験値と比較するには、より高レイノルズ数の流れを扱わねばならず、このためにはさらに多くの要素を使用して、かつ適切な乱流モデル¹⁰⁾を用いた計算が必要となる。このような計算においては、当然ベクトル計算機の使用が前提となるため、解析手法やプログラミングにおいて一層

の工夫を凝らす必要があり、今後の検討課題としたい。

参考文献

- 1) 岡島：耐風工学における数値風洞についての現況と展望，橋梁と基礎，pp.94~102，1989，8.
- 2) 例えば，田村・桑原・白山：角柱周辺の風の流れおよび風圧力の直接数値シミュレーション，第9回風工学シンポジウム論文集，pp.289~294，1986，12.
- 3) 川原：有限要素法流体解析，日科技連，pp.281~290，1988.
- 4) 畑中・川原：3次元非圧縮粘性流れの有限要素解析，土木学会第45回年次講演会概要集第2部，平成2年9月.
- 5) Shimura, M., Kawahara, M.: Two Dimensional Finite Element Flow Analysis Using the Velocity Correction Method, *Proc. of JSCE*, No.398, pp.

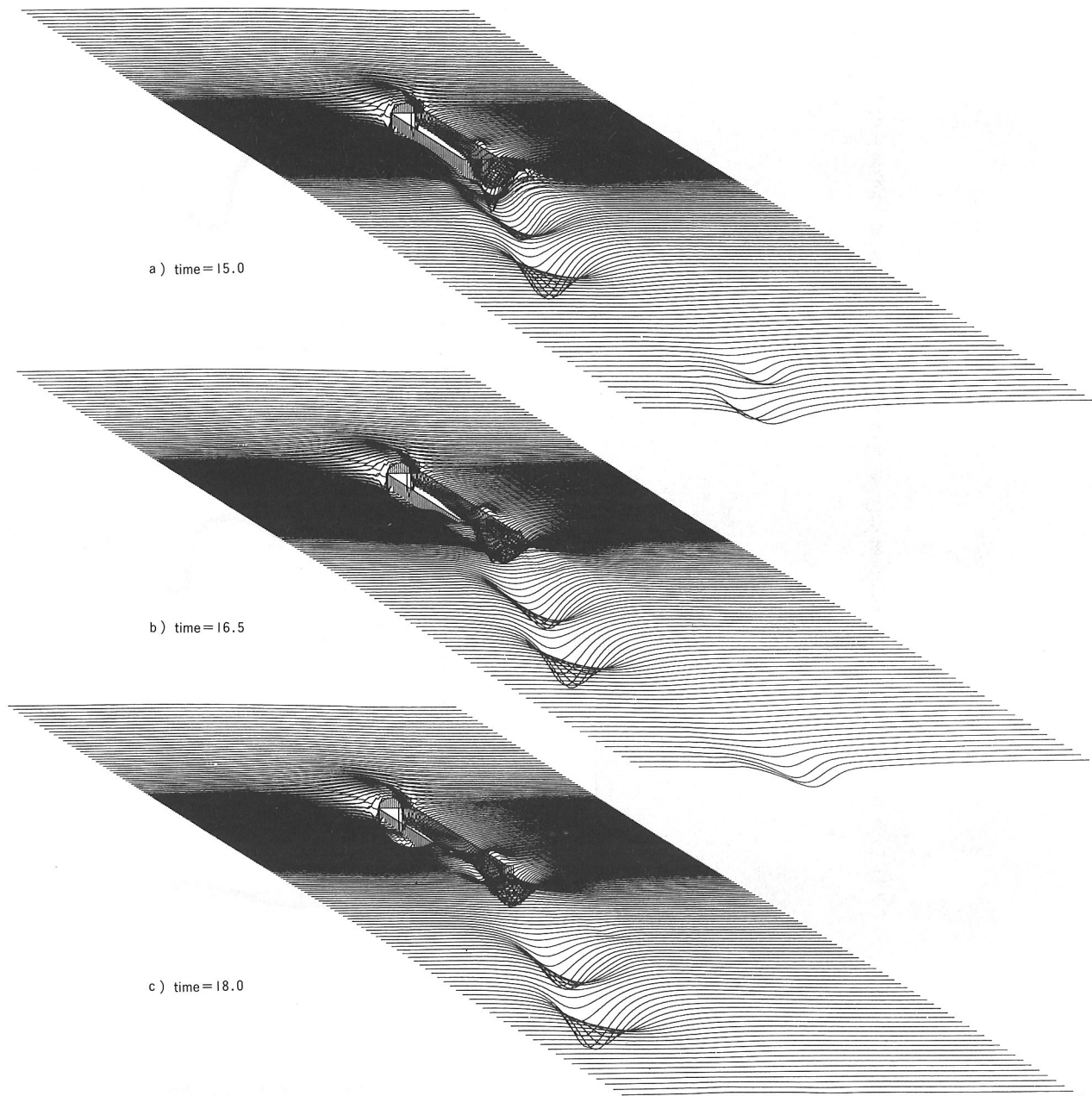


図-6 圧力の鳥瞰図

255~263, October 1988.

—現状と展望—, 昭和63年11月.

6) 船川・佐岡・小川: 充腹断面に作用する定常空気力について, 構造物の耐風性に関する第2回シンポジウム論文集, pp.43~50, 1972, 12.

7) Roache, P. J. : *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, 1976.

8) 例えば, 村田・小国・唐木: スーパーコンピュータ科学技術計算への適用, 丸善, 昭和61年7月.

9) Gresho, P. M, *et al.* : A Modified Finite Element Method for Solving the Time-Dependent, Incompressible Navier-Stokes Equations. Part 1 : Theory, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 4, 1984.

10) 宮内: 流れのシミュレーション, 第25回東京工業大学総合研究館講演会, スーパーコンピュータと計算力学