

# 小型ヘリコプタの運動安定解析（続報）

Stability Analysis of a Light Helicopter (Continuation)

趙 群飛  
Qunfei ZHAO

川田工業㈱航空事業部技術開発室

譚 安忠  
Anzhong TAN

川田工業㈱航空事業部技術開発室課長代理

赤地 一彦  
Kazuhiko AKACHI

川田工業㈱航空事業部技術開発室

川田 忠裕  
Tadahiro KAWADA

川田工業㈱航空事業部次長

In the former report (Kawada Tech. Rep. Vol. 14, Jan., 1995), a linear system model for a light helicopter in hovering was given and to what extent the flight stability is augmented by an Automatic Stability Equipment (ASE) was examined using the Root-Locus Method. In this report, an optimal approach is proposed to design the ASE with partial state feedback based on the Lyapunov's Direct Method. Furthermore improvement in transient behaviour of the dynamic system due to the ASE is shown by some performance indices of the step response.

Key words : helicopter, stability, automatic stability equipment, optimal design, step response

## 1. 序論

前回<sup>1)</sup>で述べたように、小型ヘリコプタには、突風の影響を受けたときに不安定になりやすく、特に定点ホヴァーを行う場合にはパイロットのワークロードが大きい、などの欠点がある。したがって、機体の安定性を高め、パイロットのワークロードを軽減させる自動安定装置を装備する必要があると思われる。

このため、筆者らはこれまでに2人乗り小型ヘリコプタのロビンソンR22について運動特性を調べる飛行試験を行い、各種の操舵による機体の応答などを計測して、システムモデルを同定してきた。それと同時に、計算機による飛行シミュレーションを用いて、与えられた飛行条件におけるトリム飛行解析を行い、トリム状態に微小擾乱を導入し、それによって機体に生じる力とモーメントの変化から状態変数と制御変数に関する安定微係数を定め、機体運動の理論モデルを線形化した。

前報では、このような線形モデルに基づいてホヴァリング時におけるヘリコプタの運動の安定性と可制御性を調べ、そして運動状態をフィードバックすることによって、機体の安定性がどれほど改善されたかを根軌跡法で調べた。今回は、その結果を踏まえて、リアプノフ直接法に基づく最適安定増大装置設計を行い、ヘリコプタの動特性の改善具合をステップ応答によって評価する。

## 2. ヘリコプタ運動モデル

ヘリコプタのホヴァリング飛行において、トリム状態に微小擾乱を与え、運動方程式を線形化すると、次のような線形制御系が得られる。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & X_q & X_\theta & X_v & X_p & X_\phi & X_r \\ Z_u & Z_w & Z_q & Z_\theta & Z_v & Z_p & Z_\phi & Z_r \\ M_u & M_w & M_q & M_\theta & M_v & M_p & M_\phi & M_r \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_u & Y_w & Y_q & Y_\theta & Y_v & Y_p & Y_\phi & Y_r \\ L_u & L_w & L_q & L_\theta & L_v & L_p & L_\phi & L_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ N_u & N_w & N_q & N_\theta & N_v & N_p & N_\phi & N_r \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} X_{\delta u} & X_{\delta s} & X_{\delta c} & X_{\delta or} \\ Z_{\delta u} & Z_{\delta s} & Z_{\delta c} & Z_{\delta or} \\ M_{\delta u} & M_{\delta s} & M_{\delta c} & M_{\delta or} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{\delta u} & Y_{\delta s} & Y_{\delta c} & Y_{\delta or} \\ L_{\delta u} & L_{\delta s} & L_{\delta c} & L_{\delta or} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{\delta u} & N_{\delta s} & N_{\delta c} & N_{\delta or} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = [u \ w \ q \ \theta \ v \ p \ \phi \ r]^T$$

$$\mathbf{u} = [\theta_{0M} \ \theta_s \ \theta_c \ \theta_{0T}]^T$$

状態変数は3軸方向の速度 $u, v, w$ , 角速度 $p, q, r$ と機体の姿勢角のロール角 $\phi$ とピッチ角 $\theta$ (方位角 $\psi$ はここでは考慮されない)から, 制御変数はコレクティブ・ピッチ角 $\theta_{0M}$ , 縦サイクリック・ピッチ角 $\theta_s$ , 横のサイクリック・ピッチ角 $\theta_c$ , テールロータのピッチ角 $\theta_{0T}$ からなっており, 構造行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ の要素は, 三軸方向の合計空気力 $X, Y, Z$ と三軸回りのモーメント $L, M, N$ の状態変数と制御変数に関する偏微分係数である。

### 3. フィードバック制御と安定性

線形制御系が漸近的に安定であるための必要十分条件は, その特性方程式の根がすべて負の実数部をもつことである。前報の結果より, R22のホヴァリング飛行線形系(1)は不安定ではあるが可制御であることが分かる。すなわち, 状態フィードバックによって, 系の特性根を複素平面の左半分に適当に配置でき, 系を安定化させることができる。

一般に線形系が可制御であれば, 状態フィードバックによって自由自在に極配置ができる。しかし, 小型ヘリコプタでは, すべての状態量を精度よく測定することが難しく, たとえできたとしてもコストが高すぎる。本研究においては, このような物理的な制限を考慮して, 角速度 $p, q, r$ と姿勢角 $\theta, \phi$ だけをフィードバックする。つまり, ゲイン行列

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_q & k_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_p & k_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_r \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(2)$$

とする。そして

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad \dots\dots\dots(3)$$

とすれば, フィードバック制御系は,

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} \quad \dots\dots\dots(4)$$

となる。

根軌跡から分かったように, このような制約のある状態フィードバックでも系を安定化させることができる。

### 4. リアプノフ直接法による最適設計

フィードバックゲインをある範囲に調整すれば, 系が安定となるが, どのゲインの組み合わせでコントローラを設計し, 系の動特性をどれほど改善できるのかをみるためには, 根軌跡法では不十分である。また, フィードバックゲインに制約条件が課されなければ線形レギュレータ問題として取り扱え, Riccati方程式を解けば最適制

御系が構築できるが<sup>3)</sup>, ゲイン行列は(4)のような構造をもっているなら, 既存の最適設計法が適用できない。

そこで, 系の動的応答をも考慮しながら安定性を評価するリアプノフ直接法による最適設計アプローチを提案する。

R22の場合, 制御変数に対して色々物理的な制約条件が課されているので, 最適制御の評価は動的特性だけを考える。

したがって, 最適設計問題は,

$$\begin{aligned} \text{Min } J &= \int_0^\infty \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} dt \\ \text{S. T. } \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{K} \in \Sigma = \{\mathbf{K} \mid \text{Some physical constraints}\}$$

$$\mathbf{Q}: \text{Symmetrical positive definite}$$

とする。ここで, 対称正値行列 $\mathbf{Q}$ は状態変数を評価するための重み係数行列である。これより制御系の動的特性を評価する時間領域の指標が反映される。

(5)に対して, リアプノフ関数を

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad \dots\dots\dots(7)$$

とすると, (6)から

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \quad \dots\dots\dots(8)$$

が得られ, (4)を代入すれば,

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T [(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})] \mathbf{x} \quad \dots\dots\dots(9)$$

が得られる。(9)と(7)とを比較すれば, リアプノフ行列方程式

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = -\mathbf{Q} \quad \dots\dots\dots(10)$$

が導ける。そして

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} dt \\ &= \int_0^\infty -\dot{V}(\mathbf{x}) dt \\ &= -\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \Big|_0^\infty \\ &= \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^T(\infty) \mathbf{P} \mathbf{x}(\infty) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(11)$$

リアプノフの安定定理によれば<sup>2)</sup>, 与えられた $\mathbf{A}, \mathbf{Q}$ に対して(10)を満たす対称正値行列 $\mathbf{P}$ が存在すれば系(1)が漸近安定である。そうすると,

$$\mathbf{x}(\infty) = 0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

となり, (11)より評価関数は

$$J = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0$$

となる。そして, 最適問題は,

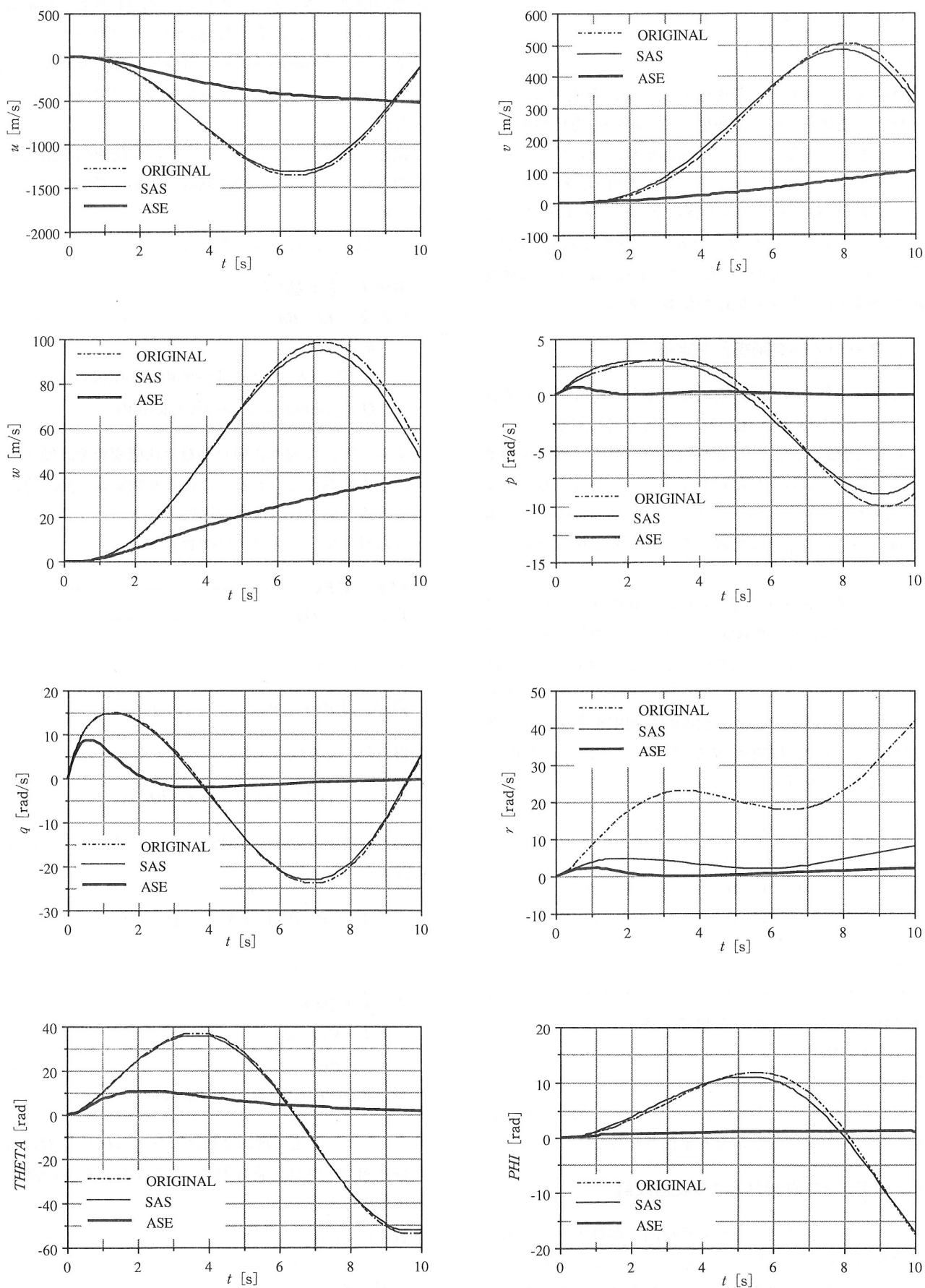


図1 R22のホヴァー飛行制御系のステップ応答( $\theta_s = 1$  [rad])  
 $(k_q, k_\theta, k_p, k_\phi, k_r) = (0.02, 0.08, -0.02, -0.08, -0.075)$

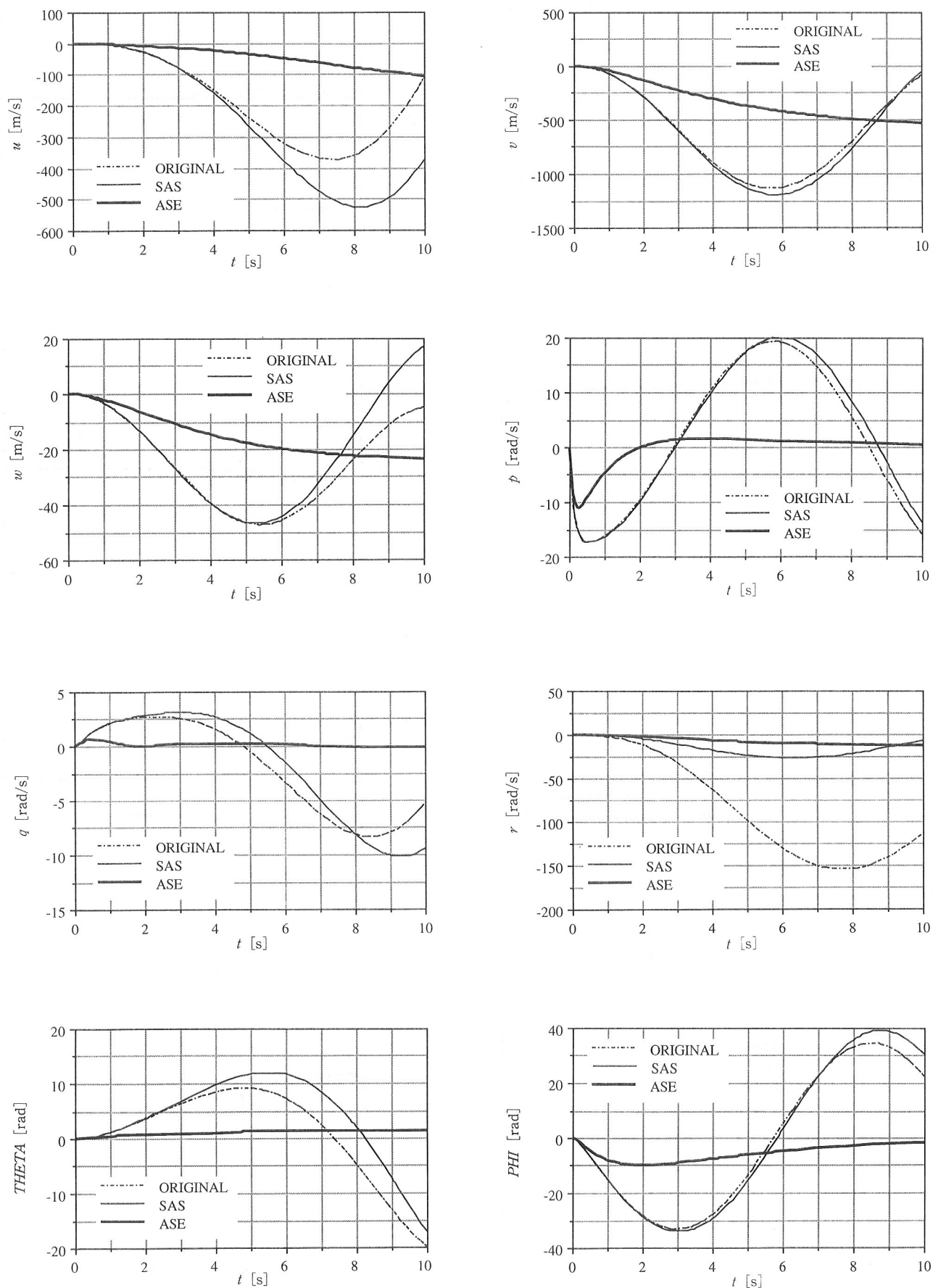


図2 R22のホヴァー飛行制御系のステップ応答 ( $\theta_c = 1$  [rad])  
 $(k_q, k_\theta, k_p, k_\phi, k_r) = (0.02, 0.08, -0.02, -0.08, -0.075)$

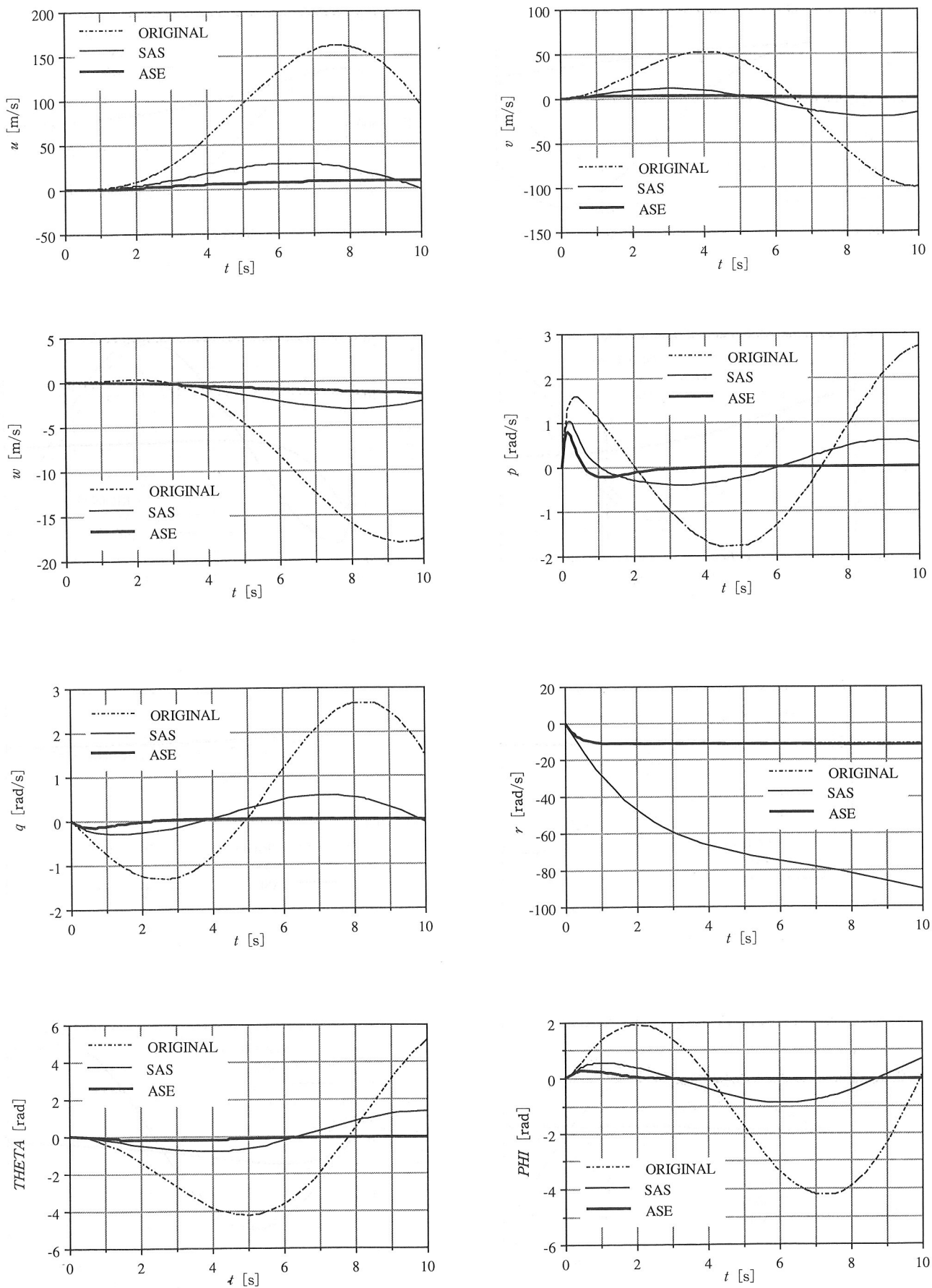


図3 R22のホヴァー飛行制御系のステップ応答 ( $\theta_0 = 1$  [rad])  
 $(k_u, k_v, k_p, k_q, k_r) = (0.02, 0.08, -0.02, -0.08, -0.075)$

$$\begin{aligned} \text{Min } J &= \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0 \\ \text{S.T. } \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) + (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} &= -\mathbf{Q} \quad \dots\dots\dots(13) \\ \mathbf{K} &\in \Sigma \\ \mathbf{P} &: \text{Symmetrical positive definite} \end{aligned}$$

となる。

一方、 $\lambda_{\max}(\mathbf{P})$  を  $\mathbf{P}$  の最大固有値とすれば、任意の  $\mathbf{x}$  に対して

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \mathbf{x}^T \mathbf{x}$$

が成り立つ<sup>3)</sup>ので、初期値  $\mathbf{x}_0$  に関係せず最適解を求めるために

$$\begin{aligned} \hat{J} &= \text{Min} \{ \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \} \\ \text{S.T. } \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) + (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} &= -\mathbf{Q} \\ \mathbf{K} &\in \Sigma \quad \dots\dots\dots(14) \\ \mathbf{P} &: \text{Symmetrical positive definite} \end{aligned}$$

を解けば良い。つまり、リアプノフ方程式の解の最大固有値を最小にするようにフィードバックゲインを選べば、

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{V}(\mathbf{x}_0) e^{-\hat{J}t} \quad \dots\dots\dots(15)$$

となる。これは、系(3)を漸近的安定化させながらよい時間応答が得られることを意味している<sup>4)</sup>。

## 5. ステップ応答

小型ヘリコプタ R22 の線形モデルに対して、評価関数の重み係数行列  $\mathbf{Q}$  を単位行列として与え、(14)の問題を解いた結果、最適 ASE のゲインは

$$\begin{aligned} (k_q, k_\theta, k_p, k_\phi, k_r) \\ = (0.02, 0.08, -0.02, -0.08, -0.075) \end{aligned}$$

となる。

図1と図2には、縦サイクリック・ピッチ操縦と横のサイクリック・ピッチ操縦にステップ  $\theta_s = 1 \text{ rad}$  と  $\theta_c = 1 \text{ rad}$  をそれぞれ入力するときの系の時間応答が示されている。図示のように、ヨーSASによるフィードバック制御を行う場合、ヨー角速度  $r$  の応答にはよく改善が見えているのに対して、他の応答には影響がほとんどない。一方、ASEによるフィードバック制御を行う場合では、系が安定であるので、各変数の応答は振動なく定常状態に収束できる。

図3には、テールロータ・ピッチ  $\theta_{0T}$  のステップ操縦入力に対して、SASによるフィードバック制御の場合とASEによるフィードバック制御の場合における系のステップ応答が示されている。図からわかるように、ステップ  $\theta_{0T} = 1$  に対して、各変数の時間応答がヨーSAS制御によって改善されているが、ASE制御によってもっとも安定化され顕著に改善されている。

## 6. まとめ

小型ヘリコプタのような部分的状態フィードバック制御系の設計では、次のようなアプローチも提案されている。

- ① 測定できる状態変数にはノイズが含まれているため、カルマンフィルタを通して他の変数を推定する。
- ② 測定できる状態変数を尊重して測定不可能な状態変数だけを最小次元オブザーバで推定する。
- ③ 逆最適LQ制御問題としてとらえるか、 $H_\infty$ 制御の手法を利用する。

しかし、これらの方法での解析設計は煩雑でコントローラ実現上も問題がある。これに対し、筆者らのアプローチによれば解析計算はやや面倒になるものの、システム構成もコントローラ実現も簡単になる。

## 謝 辞

この研究に当たって、東京大学名誉教授東 昭先生、東京都立科学技術大学教授古茂田真幸先生、日本大学教授川幡長勝先生および航空宇宙技術研究所の斉藤茂先生と奥野善則先生から大変親切なご指導をいただきました。ここに記して感謝の意を表します。

## 参考文献

- 1) 川田忠裕・譚 安忠・趙 群飛・赤地一彦：小型ヘリコプタの運動安定解析，川田技報，Vol.14，pp.73～78．Jan. 1995．
- 2) 趙 群飛・戸荏吉孝・後藤秀雄：Lyapunov行列方程式の一解法，計測自動制御学会論文集，Vol.21，No.2，pp.97～99，Feb.1985．
- 3) 伊藤正美：システム制御理論，昭晃堂，1973．
- 4) M. Gopal：Modern Control System Theory，Wiley Eastern Lt. 1984．
- 5) 東 昭：航空工学(I)，(II)，裳華房，1989．