

動的複合非線形解析プログラムの開発

Development of a Geometric Nonlinear Dynamic Analysis Program

豊田 純教
Yoshinori TOYODA

川田テクノシステム開発部
開発二課係長

中島 章典
Akinori NAKAJIMA

宇都宮大学教授

趙 清
Kiyoshi CYOU

川田テクノシステム東京設計部
設計二課

斉木 功
Isao SAIKI

宇都宮大学助手

大植 健
Ken OOUE

川田テクノシステム開発部
開発二課

現在、耐震設計業務においては、汎用解析プログラムを用いて動的非線形解析法を適用する機会が多い。一方で、耐震性能向上を目的とした、水平反力分散支承、免震支承、機能分離型支承や落橋防止構造などは複雑な復元力特性を有する。そのため、より高精度かつ柔軟な拡張性と実用性を兼ね備えた耐震設計支援システムが必要とされている。本報告では、幾何学的非線形性と材料非線形性を考慮した平面骨組解析法の基礎理論の概要を示すとともに、その特徴を紹介する。また、構築したプログラムの妥当性の検討として、鋼製ラーメン脚を対象とした動的複合非線形解析を行い、汎用解析プログラムとの比較を行う。

キーワード：平面動的複合非線形解析，耐震設計，鋼製ラーメン橋脚，ベンチマークテスト

1. はじめに

兵庫県南部地震以降、道路橋示方書・同解説（耐震設計編）をはじめとする各種の設計基準において、動的非線形解析を適用した耐震設計法が規定されている。また、それに伴い動的解析法を用いた耐震設計に関して、種々の研究報告や設計事例の報告が行われ、実務レベルにおいても動的非線形解析法の適用が急速に普及してきた。さらに、この普及により汎用動的解析プログラムおよびそれらを解析ソルバーとした多数の設計支援システムの開発が行われ、それらの信頼性を検証するベンチマーク結果も報告されている^{2),3)}。これに伴い、動的非線形解析においてこれまで実務レベルにおいては使用されていなかった多くの理論、手法が次々と導入され始めており、動的非線形プログラムの汎用性は益々高まる傾向にある。

一方、近年の性能照査型耐震設計への移行により、動的非線形解析を行う際のモデル化、解析条件等の選定に関しても設計技術者の裁量に委ねられるケースが多くなっていく。しかし、現状において全ての技術者が汎用動的非線形解析プログラムを用いて信頼性のある結果を得ることは非常に困難である。そのような中で耐震設計支援システムにおいては、ある程度の解析機能を限定することで操作性を向上させ、技術者の技量の補足を行うこ

とも必要である。

そこで、著者らは、橋梁の耐震設計業務に必要な汎用性と拡張性を持つ解析ソルバーを用いた耐震設計システムの開発を目的としてきた。そして、宇都宮大学との共同研究を行い、これまでに幾何学的非線形性と材料非線形性を考慮した平面動的骨組解析プログラムを解析ソルバーとする設計支援システムの開発を行った。

本報告では、解析ソルバーである平面動的複合非線形解析プログラムに用いた理論とその定式化を示し、それらの特徴を述べる。また、そのプログラムを用いて鋼製ラーメン脚を対象とした有限変位弾塑性地震応答解析を行い、汎用解析プログラムとの比較から解の精度と信頼性の検討を行う。

2. 解析プログラムに用いた理論と定式化

本節では、平面動的複合非線形解析プログラムを構築する際に用いたモデル化の手法と理論について説明する。特に非線形性を導入する理論・手法は多数存在し^{4),5)}、その選択によって解析精度も大きく左右される。よって、ここでは幾何学的非線形性と材料非線形性の導入に関してその定式化を詳細に示す。なお、今回構築した解析プログラムを本PGと呼ぶこととする。

(1) 幾何学的非線形性の定式化

通常、有限変位理論の適用においてはひずみの定義を高次の微分式として定式化を行うため、非常に煩雑な作業を伴うこととなる⁴⁾。しかし、骨組要素においては有限変位問題においてもひずみが有限となることは少なく、有限変位・微小ひずみ問題として扱うことが適している。そこで、一般に骨組有限要素解析においては剛体変位除去法^{6),7)}と呼ばれる手法が用いられ、本PGにおいてもこの手法を用いている。

剛体変位除去法とは、離散化した各要素に対し移動座標系と呼ばれる要素の剛体回転に追従して変化する座標を定義する。このように剛体回転を除去した移動座標系においては微小変位理論に基づいたひずみ - 変位関係式を適用し、剛体回転に関しては座標変換則において考慮することにより、有限変位理論に基づく有限要素解に近接できる。しかし、剛体変位除去法では、要素内において微小変位理論を適用しているため、1要素の変形が大きくなるような場合、解の精度低下が生じる。よって、大変形問題を扱う場合は適切な要素分割が必要となる。

剛体変位除去の手法により構築した本PGの有限変位解析精度の確認として、Elastica理論⁸⁾によって導かれた梁の有限変位解と本PGの結果の比較を行う。Elasticaの理論とは十分に細長比の大きい部材に対して軸線方向に不伸張の仮定を施すことにより、その解を楕円積分で表したものである。これにより特定の構造系に対しては非常に精度のよい有限変位解の算出を可能としている。

この理論を用いて有限変位解を算出できる構造形式として、**図1**に示す先端に集中モーメント M を受ける梁を扱う。この長さ $\ell = 10$ (m) の片持ち梁の先端における鉛直方向変位 w は

$$w = \frac{EI}{M} \left\{ \cos \frac{Ml}{EI} - 1 \right\} \quad (1)$$

と表される。ここに E はヤング係数、 I は断面二次モーメントであり、 $EI = 0.0833$ kN・m²としている。また、式(1)より $M = 2\pi EI / \ell$ の時、鉛直変位 w がゼロとなる。これは、集中モーメントにより梁が真円形にまで変形した状態である。本PGにおいて同様な片持ち梁の要素分割数を2, 5, 10と変化させた結果との比較を**図2**に示す。梁を2要素とした場合、1要素の変形が大きくなりすぎ

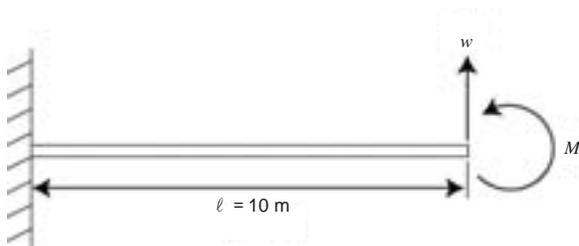


図1 先端に集中モーメントを受ける片持ち梁

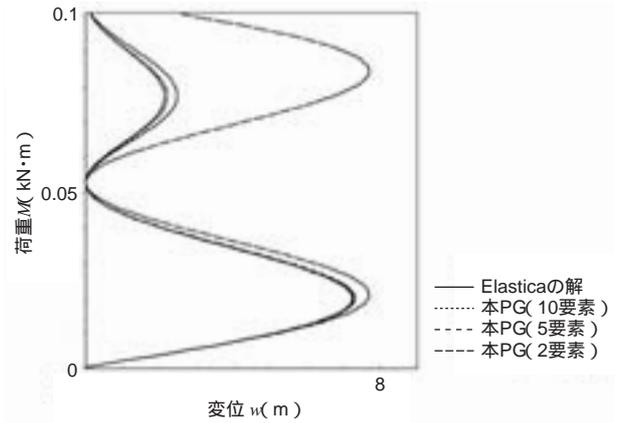


図2 Elasticaの理論解との比較

るため最大たわみ付近より結果に差異が生じ始めるが、要素数を5要素とした場合では梁が真円となる大変位状態まで解の一致が見られる。さらに10要素とした場合、梁が2周の円を描く大変位状態においても解が一致している。

(2) 材料非線形性の定式化

a) 降伏関数

本PGではTimoshenko梁理論とBernoulli-Euler梁理論、両者の対応を可能としているが、ここでは簡単のため梁理論をBernoulli-Euler梁理論として、扱う応力ひずみ関係を部材軸方向のみとした場合の定式化を示す。

金属材料を対象とし、硬化則として等方硬化則を用いた場合の降伏判定条件を以下のように定義する。

$$f := |\sigma| - (\sigma_y + K\alpha) \leq 0 \quad (2)$$

ここに、 σ は直応力、 σ_y は初期降伏応力、 K は塑性係数、 α はひずみ硬化パラメータである。

b) Return-Mapping法

一般に、弾塑性解析においては、構造物全体の釣り合いとすべての物性評価点での降伏条件の双方を満足させる必要がある。その方法として本PGでは後退Euler法に基づくReturn-Mappingアルゴリズムを採用しており、塑性変形時の応力状態を精度よく評価している。一般的な平面ひずみ、平面応力や立体問題におけるReturn-Mappingの定式化はすでに多くの文献^{9), 10)}において紹介されている。ここでは一軸応力状態におけるReturn-Mapping法のアルゴリズムについて紹介する。

時刻 t_{n+1} における試行状態 (trial state) が、時刻 t_n における釣り合い状態の応力 σ_n 、ひずみ ϵ_n 、および増分ひずみ $\Delta(\epsilon_n)$ によって以下のように定義できるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n+1}^{\text{trial}} &= \sigma_n + E\Delta(\varepsilon_n) \\ &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{\text{P}}) \\ (\varepsilon_{n+1}^{\text{P}})^{\text{trial}} &= \varepsilon_n^{\text{P}} \\ f_{n+1}^{\text{trial}} &= |\sigma_{n+1}^{\text{trial}}| - (\sigma_Y + K\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに、 ε_n^{P} 、 $\varepsilon_{n+1}^{\text{P}}$ は塑性ひずみ、 E はヤング係数である。式(2)に基づき、 $f_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0$ ならば弾性範囲であり試行状態は満足され、時刻 t_{n+1} の応力、ひずみが次式で求まる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{\text{trial}} \\ \varepsilon_{n+1}^{\text{P}} &= (\varepsilon_{n+1}^{\text{P}})^{\text{trial}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

これに対し $f_{n+1}^{\text{trial}} > 0$ の場合には、試行状態において仮定された時刻 t_{n+1} の応力、ひずみは正解とならない。そこで、塑性ひずみの主軸と応力の主軸は一致すると仮定した関連流れ則に基づき、 $\Delta\gamma$ を整合パラメータとして時刻 t_{n+1} での塑性ひずみ $\varepsilon_{n+1}^{\text{P}}$ を書くと次式を得る。

$$\varepsilon_{n+1}^{\text{P}} := \varepsilon_n^{\text{P}} + \Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (5)$$

ここに、 $\text{sign}(\)$ は()内の変数の符号を表す。よって、増分塑性ひずみ $\Delta(\varepsilon_{n+1}^{\text{P}})$ は、以下ようになる。

$$\Delta(\varepsilon_{n+1}^{\text{P}}) = \Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (6)$$

ここで、時刻 t_{n+1} で正解となる応力 σ_{n+1} は、試行状態の応力と $\Delta\gamma$ により表せる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n+1} &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{\text{P}}) \\ &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{\text{P}}) - E(\varepsilon_{n+1}^{\text{P}} - \varepsilon_n^{\text{P}}) \\ &= \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - E\Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

上式で与えられた σ_{n+1} が降伏曲面上にあるという条件 $f_{n+1} = 0$ を満足するため以下の式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} f_{n+1} &= |\sigma_{n+1}^{\text{trial}}| - E\Delta\gamma - (\sigma_Y + K\alpha_n) - K(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\ &= f_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\gamma(E + K) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

よって、 $\Delta\gamma$ が次式から得られる。

$$\Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{\text{trial}}}{E + K} \quad (9)$$

式(9)より得られた $\Delta\gamma$ を式(7)に代入すると時刻 t_{n+1} での正解となる応力が与えられる。

3. 解析結果

本節では、本PGの精度と信頼性の検証として既存の汎用動的非線形解析プログラム⁽¹¹⁾との比較を行う。既存の汎用動的非線形解析プログラムはこれまでの多くの実績から、その解析精度は十分確かなものであるといえる。

また以降この汎用解析プログラムを参照PGと呼ぶこととする。

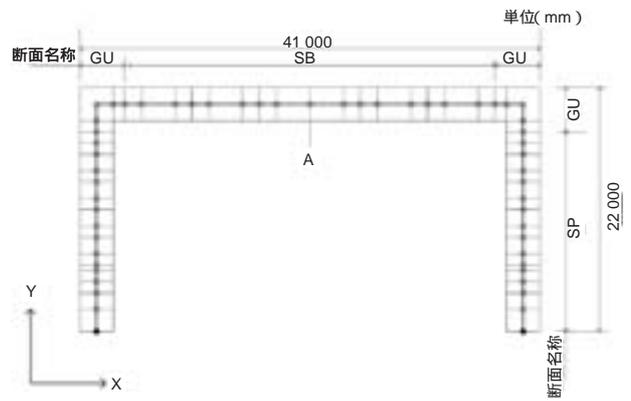


図3 解析対象

表1 断面緒元

断面名称	SP	GU	SB
断面形状	箱型		
材質	SM490Y	SM570	SM490Y
上フランジ幅(mm)	3 000	3 000	3 000
上フランジ厚(mm)	70	90	50
ウェブ高さ(mm)	2 860	2 820	2 900
ウェブ厚(mm)	70	90	50
下フランジ幅(mm)	3 000	3 000	3 000
下フランジ厚(mm)	70	90	50
フランジリブ面積(mm ²)	60×400×6本	60×400×6本	40×290×6本
ウェブリブ面積(mm ²)	60×400×6本	60×400×6本	—

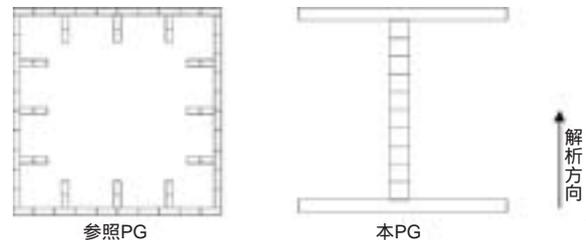


図4 ファイバー分割

(1) 解析モデル

ベンチマークに用いた解析対象として、本報告では図3に示す鋼製一層ラーメン橋脚を用いた。コンクリート充填はなしとし、柱長は22 m、横梁の長さは41 mとしている。梁柱部の断面は箱型補剛断面としており、柱部の断面をSP、隅角部の断面をGU、梁部の断面をSBとする。各断面諸元について表1のように定めた。鋼材のヤング係数は200 kN/mm²、ポアソン比0.3、断面SPとSBの初期降伏応力は355 N/mm²とし、断面GUでは451 N/mm²とした。上部工重量は横梁中央の点Aに40.0 MNを一点荷重し、支承条件および各橋脚の基部条件は固定としている。

この鋼製ラーメン脚に図3に示すように、全体座標系として橋軸直角方向にX軸、鉛直方向にY軸を設定し、面内解析を行う。断面のモデル化に関して、参照PGにおいては図4に示すように補剛断面を忠実にモデル化し

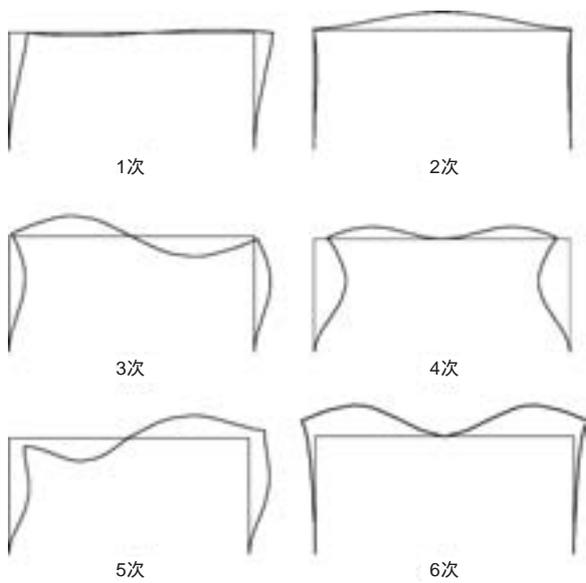


図5 振動モード図（本PGによる）

表2 振動特性値比較

振動次数	使用PG	固有周期 (s) × 10 ⁻¹	X方向 有効質量率 (%)	X方向 刺激係数
1次	本PG	6.3281	79.01	25.02
	参照PG	6.3292	79.00	25.02
2次	本PG	5.7565	0.0	0.0
	参照PG	5.7662	0.0	0.0
3次	本PG	0.3490	48.85	19.67
	参照PG	0.3494	48.74	19.65
4次	本PG	0.3130	0.0	0.0
	参照PG	0.3130	0.0	0.0
5次	本PG	0.2677	68.84	23.36
	参照PG	0.2678	68.81	23.35
6次	本PG	0.2287	0.0	0.0
	参照PG	0.2289	0.0	0.0

たファイバーモデルとしたが、本PGでは補剛断面への対応が現状ではなされていないため、以下の条件¹²⁾を満たすように補剛断面を等価な型断面に置換しモデル化を行った。

- 断面幅は不変
- 断面積は不変
- 全塑性モーメントは不変

(2) 固有値解析結果の比較

ここでは、対象とした鋼製一層ラーメン脚に対して固有値解析から得られる振動特性の結果比較を行う。本PGにおいて算出した1次～6次までの振動モードを図5に示す。参照PGによって算出した振動モードもほぼ同様の形状で得られた。1次～6次における振動特性値を表2に示す。固有周期、有効質量率、刺激係数ともに、0.2%以下の誤差は生じているものの本PGと参照PGの値はほぼ一致する結果を得た。

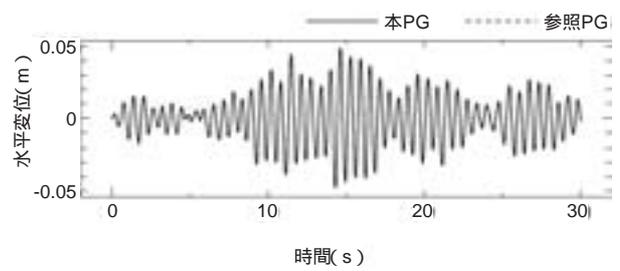


図6 レベル1地震動による変位時刻歴の比較図

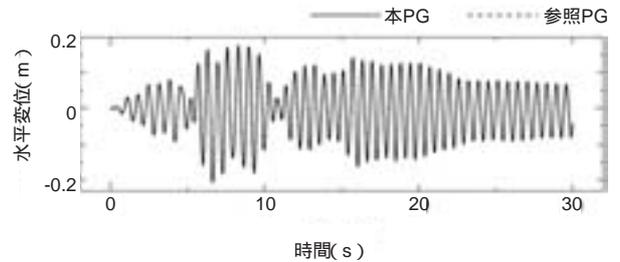


図7 レベル2地震動による変位時刻歴の比較図

(3) 時刻歴応答解析結果の比較

動的複合非線形解析における数値積分には、Newmark法 ($\gamma = 0.25$) を用い、時間刻みは数値積分上の誤差を低減させるため入力地震動の0.01秒刻みのデジタルデータを直線補完する方法により細分化し0.002秒とした。減衰はRayleigh減衰を採用し、前節の固有値解析の結果から卓越モードとして1次モードと5次モードを選択しRayleigh減衰を定めた。また、要素ごとの減衰定数hは全要素h = 0.01としている。

まずは、入力加速度としてレベル1地震動に相当する板島橋周辺地盤上記録の地震波を与え、応答変位が小さくし、梁柱部材に塑性化を生じさせない状態として線形問題とみなせる条件での応答の比較を行った。図6に本PGを実線、参照PGを点線として脚天端の変位時刻歴応答を示す。この結果から、線形問題と見なせる範疇では、本PGと参照PGの変位時刻歴は一致していることが確認できる。

次に、脚の基部および隅角部において塑性化が生じるモデルとして、入力加速度にレベル2に相当する神戸海洋気象台地盤上記録のNS成分を用い、結果を比較する。図7に脚天端の変位時刻歴応答の比較図、図8に脚基部が

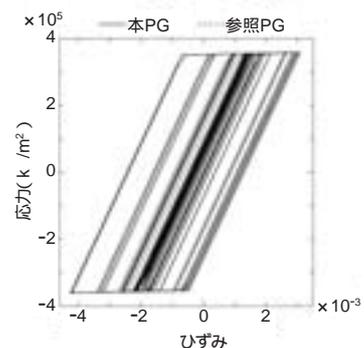


図8 レベル2地震動による応力ひずみ履歴の比較図

表3 動的解析最大応答値比較

応答値	本PG	参照PG
脚天端の最大応答変位(m)	0.204(-2.39%)	0.209
柱基部最外縁の最大ひずみ	0.00468(-3.51%)	0.00485
脚天端の残留変位(m)	-0.00866(34.26%)	-0.00645

ら1 mの位置の断面における最外縁の応力ひずみ履歴の比較図を示す。また表3に各応答の最大値の比較を示す。表中の()内の数値は本PGの応答値と参照PGの応答値との相対誤差を示す。また、時刻歴応答値を30秒までの算出としており、この時点では振動が収まっていないため、残留変位に関しては30秒直前の1振幅から最大値と最小値を抽出し、その平均を残留変位としている¹⁾。これらの結果から、レベル2地震動においても、時刻歴応答変位と最大応答変位に関してはほぼ一致する結果を得た。また、応力ひずみ履歴と最大ひずみも、ほぼ一致する結果を得た。一般に多くの動的解析プログラムにおいて残留変位は精度の検証が困難な応答値であり、本ベンチマークテストにおいても相対誤差が34.26%と非常に大きく出ている。その原因としては、残留変位は他の変位応答に比べて算出値のオーダーが小さいこと、数値積分による累積誤差が表れやすいことなどが挙げられる。

本PGではReturn-Mapping法を用いているため、弾塑性解析において降伏条件と算出応力の不整合をなくしている。一般にこの不整合は荷重増分を大きくとった場合に生じやすく、換言すれば本PGは得られる結果が荷重増分にほとんど依存しない特徴をもつといえる。また、応力から算出されるひずみ応答に関してその特徴が顕著に表れる。図9に本PGと参照PGにおいて時間刻みを変化させたときの最大ひずみ応答の比較グラフを示す。横軸に時間刻み0.001秒の時の最大ひずみ $\epsilon_{0.001}$ で除した値をとる。この結果から、時間刻みが比較的粗い0.01秒の場合、参照PGでは解の精度が極端に落ち、時間刻み0.001秒としたときに比べ、65%ほど誤差が発生している。これに対し、本PGでは時間刻み0.01においても、その誤差は

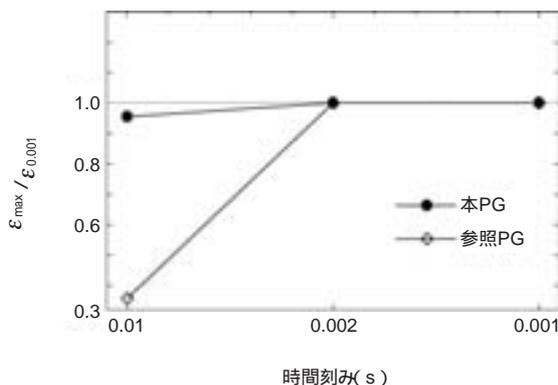


図9 時間刻みステップ数による最大ひずみの比較図

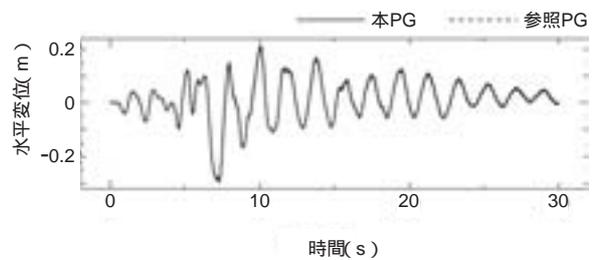


図10 上部工重量を10倍とした変位時刻歴の比較図

5%ほどであり、時間刻みの細分化に大きく左右されない特徴が確認できた。

前節でも述べたように、本PGでは幾何学的非線形性を考慮している。以下では、その影響について考察を加える。欧州鋼構造協会連合協議会(ECCS)の規定¹³⁾によると、静荷重を受ける長方形ラーメン構造に対し以下の条件が満足されれば効果は無視できるとしている。

$$\frac{\delta \sum V}{h \sum H} \leq 0.1 \quad (10)$$

ここに、 $\sum V$ はラーメン基部の鉛直力の和、 $\sum H$ はラーメン基部の水平力の和、 δ は柱頂部の水平変位、 h は柱高さである。これまでに解析対象としてきたラーメン脚に対し、条件式(10)を適用すると、

$\delta \sum V / h \sum H = 0.0053 < 0.1$ となり、幾何学的非線形性の影響が低いモデルであると考えられる。そこで、上部工重量を40 MNから10倍の400 MNに変更し、

$\delta \sum V / h \sum H = 0.1747 > 0.1$ となる状態とした。本PGにおいて幾何学的非線形性と材料非線形性を考慮した動的複合非線形解析を行い、参照PGにおいて材料非線形性のみを考慮した動的非線形解析を行った。図10がその変位時刻歴の比較図である。この結果より、最大変位をすぎるところから応答に差異が生じていることが確認できるが、大きな影響は表れない結果となった。

4. おわりに

今回の解析結果では、累積誤差の影響が大きい残留変位以外について、固有値解析結果および時刻歴応答解析結果の最大誤差は±5%以内の範囲に分布しており、土木研究センターで実施されている「耐震ソフトウェア委員会」³⁾で目標としている許容誤差の10%を満足し、実用上十分な精度を有していることが確認できた。以下に本PGの優位性と問題点をまとめ、最後に本PGの今後の拡張点を述べる。

(1) 本PGの優位性

Return-Mapping法により降伏条件と不整合が生じない応力を算出することで、荷重増分(時間刻み)を粗くしても本PGは精度よく計算できることが確認できた。

(2) 本PGの問題点

ファイバー要素を定義する形状が箱型およびI型断面に限定されているので、補剛断面等の複雑な断面形状については等価断面に置き換える必要がある。

(3) 本PGの今後の拡張点

本PGを実用的なシステムに拡張するために必要な項目を以下に挙げる。

- ・ファイバー要素として取り扱える断面形状の適用の拡張および複合断面への対応
- ・解析自由度の平面問題から立体問題への拡張
- ・プリ・ポスト機能の強化
入出力のビジュアル化、解析データのチェック機能および入出力ファイルのCSV化が必要である。
- ・ファイバー要素作成支援ツールの整備
ファイバー要素を取り扱う場合、多量な情報を取り扱うことになる。したがって、ファイバー要素のジェネレートツール、断面情報の管理ツールなどの支援ツールを整備して、解析モデル作成について、作業の省力化とデータミスの防止を図る必要がある。

なお、今回の検証モデルでは、幾何学的非線形性の影響が顕著には表れなかったが、動的挙動が複雑なアーチ橋や斜張橋または、長周期構造のような断面力応答より変位応答の影響が重要となる構造は、幾何学的非線形性を考慮した手法を用いる必要がある。今後は、幾何学的非線形性を考慮する必要性が高い構造物に対して、動的複合非線形解析の検討業務に幅広く活用できるシステムとして本PGを構築する考えである。

参考文献

- 1) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説（耐震設計編），丸善，2002.3.
- 2) 鋼構造物の耐震検討小委員会：鋼構造物の耐震解析用ベンチマークと耐震設計法の高度化，(社)土木学会，2000.4.
- 3) 土木研究センター：平成9・10年度耐震設計ソフトウェアに関する研究委員会報告書，1999.4.
- 4) 土木学会構造工学委員会：構造工学における計算力学の基礎と応用，丸善，1996.12.
- 5) (社)日本塑性加工学会：非線形有限要素法，コロナ社，1994.12.
- 6) 齊木，後藤，岩熊：有限回転を許容する棒部材の3次元動的数値解析の一手法，構造工学論文集，Vol. 44A，pp.275-282，1998.3.
- 7) 齊木，岩熊，M.P.Sharma，井浦：平面柔構造のための一動的数値解析，構造工学論文集，Vol. 42A，pp.275-282，1996.3.
- 8) Theory of elastic stability-- 2nd ed.. --/ [by] S. P. Timoshenko, J. M. Gere. New York : McGraw-Hill, 1961.
- 9) J.C.Simo, and R.L.Taylor : A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elastoplasticity, Int. J. Numer. Methods Engrg., Vol. 22, pp. 649-670, 1986.
- 10) J.C. Simo and T.J.R. Hughes: Computational Inelasticity, Springer, 1998.
- 11) TDAP バッチ版 V2.10 使用手引書，(株)アーク情報システム，2000.10.
- 12) 名古屋高速道路公社 工務部設計課：コンクリートを部分的に充填した鋼製橋脚の耐震性能照査要領（案），2002.4.
- 13) ECCS: Essentials of Eurocode 3, Design Manual for Steel Structures in Building, 1991.